Tema 3

Sucesiones y Series

3.1. Sucesiones de números reales

Definición 3.1.1 *Una* **sucesión de números reales** $\{a_n\}$ *es una aplicación que asigna a cada* $n \in \mathbb{N}$ *un número real:*

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ son los términos de la sucesión.
a_n es el término general.
La sucesión también puede empezar en $n = 0$: $a_0, a_1, a_2 \ldots$.

Definición 3.1.2 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice* **convergente** *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$*, para* L *finito.*

El **límite** *de una sucesión* $\{a_n\}$ *es* L *si para todo* $\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$*. (Hay una definición alternativa para* L *infinito.)*

Si la sucesión no es convergente, decimos que es **divergente.**
Las propiedades de los límites de sucesiones son las mismas que las propiedades de los límites de funciones.

Para **hallar el límite** de una sucesión podemos utilizar algunas técnicas como:

- El concepto de límite de una función:

  Sea $f(x)$ una función y $\{a_n\}$ la sucesión $f(n) = a_n$.

  Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

  Podemos utilizar todas las herramientas para calcular el límite de una función, como, por ejemplo, la regla de L'Hôpital.

- El **lema del Sandwich** para sucesiones:

  Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ (finita o infinita) y $\{c_n\}$ verifica que
  $$a_n \le c_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
  entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Definición 3.1.3 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice:*

1. *acotada superiormente si* $\exists\, C \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq C$.

2. *acotada inferiormente si* $\exists\, C \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq C$.

3. **acotada** *si es acotada superiormente e inferiormente* ($\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, *t. q.* $C_1 \leq a_n \leq C_2$).

Definición 3.1.4 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice:*

1. *monótona creciente si* $a_n < a_{n+1}$ *(no decreciente si* $a_n \leq a_{n+1}$*).*

2. *monótona decreciente si* $a_n > a_{n+1}$ *(no creciente si* $a_n \geq a_{n+1}$*).*

3. **monótona**, *si es uno de los casos previos.*

Teorema 3.1.5

$$\boxed{\{a_n\} \text{ monótona y acotada} \Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente}}$$

Teorema 3.1.6 (Criterio de Stolz) *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *verifican uno de los siguientes apartados:*

1. $\{b_n\}$ *es monótona creciente con* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$,

2. $\{b_n\}$ *es monótona decreciente, con* $b_n \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Siempre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, *exista parar* L *finito o infinito, entonces*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}}$$

Teorema 3.1.7 (Fórmula de Stirling)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1}$$

3.2. Series de números reales

Una serie es la suma de una sucesión de términos

Por ejemplo $\rightarrow$ la suma geométrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}$.

Definición 3.2.1 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión, una* **serie***(infinita) es la suma de todos sus términos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

La **suma parcial** *de n términos es $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$.*
Si la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales converge al límite S, entonces decimos que la serie
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge***, y S es la suma de la serie:*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

En otro caso, decimos que la serie **diverge.**

Propiedades

1. $\sum a_n$ y $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum a_n + c_2 \sum b_n$ conv.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.
3. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Pero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ conv)

Teorema 3.2.2 *La* **suma geométrica** *converge si $0 < |r| < 1$, en este caso*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Teorema 3.2.3 *La* **serie telescópica** *($a_n = b_n - b_{n+1}$)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

verifica que $S_n = b_1 - b_{n+1}$.
Esta serie converge $\iff \lim\limits_{n\to\infty} b_n < \infty$ y

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema 3.2.4 *La* **p-serie** *($p = 1$ es la serie armónica)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

1. *converge si $p > 1$.*
2. *diverge si $0 < p \leq 1$.*

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES

1. **Criterio de comparación directa:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos

$$0 < a_n \leq b_n, \forall\, n \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \end{array}$$

2. **Criterio de comparación en el límite:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \text{ finito y positivo}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo comportamiento}$$

ambas convergen o ambas divergen

3. **Criterio de la raíz:** $\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye}$$

4. **Criterio del cociente:** $\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye}$$

5. **Criterio de Leibniz para series alternadas:**
$\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\text{Si } a_{n+1} \leq a_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{La serie alternada } \sum (-1)^n a_n \text{ converge condicionalmente}$$
$$\left(\sum (-1)^{n+1} a_n\right)$$

Definición 3.2.5

AC. *$\sum a_n$ es* **absolutamente convergente** *si $\sum |a_n|$ es convergente.*

CC. *Si $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ es divergente, entonces la serie es* **condicionalmente convergente**.

Convergencia absoluta	$\Longrightarrow$	Convergencia condicional
No convergencia condicional	$\Longrightarrow$	No convergencia absoluta

ERROR

Cuando aproximamos la suma de una serie alternada por sus primeros n términos, entonces

$$S = S_N + R_N = \sum_{n=1}^{N}(-1^n)a_n + R_N \quad \Rightarrow \; |R_N| \leq a_{N+1}$$

Nota. Podemos derivar o integrar una serie infinita para obtener otra serie.

3.3. Series de potencias

Definición 3.3.1 *Una* **serie de potencias** *centrada en x_0 es una serie infinita de la forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Teorema 3.3.2 (Convergencia de las series de potencias)
Una serie de potencias en x_0 verifica uno y sólo uno de los siguientes apartados:

1. *La serie converge sólo en x_0*
2. *Existe un número real $\rho > 0$ tal que la serie es*
   - *absolutamente convergente en $|x-c| < \rho$*
   - *divergente en $|x-c| > \rho$*
3. *La serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$*

Nota. ρ es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. $\rho = 0$, $\rho < \infty$ ó $\rho = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie converge es el **intervalo de convergencia** de la serie. El radio se puede obtener mediante las siguientes formulas:

- $\dfrac{1}{\rho} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- $\dfrac{1}{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, si el límite existe

Teorema 3.3.3 *Si la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$, entonces $f(x)$ es continua, derivable e integrable en $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. La derivada y la integral se calculan término a término. Ambas tienen el mismo radio de convergencia que f. El intervalo de convergencia puede ser diferente, debido al comportamiento en los extremos ($x = x_0 \pm \rho$).*

Propiedades.
Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{Nn}$
3. $c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) x^n$

Definición 3.3.4 *Si existen todas las derivadas de f en x_0, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama la **serie de Taylor** *de f centrada en x_0 (para $x_0 = 0$ también se llama la serie de Mac Laurin de f).*

Teorema 3.3.5 *Si existen todas las derivadas de f en un intervalo abierto I que contiene a x_0 entonces*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si y solo si existe ξ entre x y x_0 tal que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0, \quad \forall\, x \in I.$$

SERIES DE TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdots, \quad -1 \le x \le 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \cdots, \quad -1 < x \le 1$$