# Tema 4

# Integración

## 4.1. Primitivas

### LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo $x \in [a, b]$, entonces la **integral definida**

$$\int_a^b f(x)$$

representa el **área bajo la gráfica** de la función $f(x)$ y sobre el eje $x$ en el intervalo $x \in [a, b]$.

Si $f(x)$ es una función general, la integral definida representa la **suma de áreas con signo** entre la función y el eje $x$. La idea para calcular la integral definida es dividir el intervalo en $n$ subintervalos y aproximar la función por una constante (el menor o el mayor valor, el valor del punto medio o cualquier valor de la función en el intervalo). Entonces, calculamos el área de $n$ rectángulos, que es mucho más sencillo. Si aproximamos $f \simeq f(x_i)$ en el intervalo $i$-ésimo, con todos los intervalos de la misma longitud, $\Delta x$, entonces podemos aproximar la integral como

$$\int_a^b f(x) \simeq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Si aproximamos la función en el intervalo por los siguientes valores, obtenemos los que se llama, para dicha partición del intervalo

| | |
|---|---|
| El menor valor en cada subintervalo | $\rightarrow$ suma inferior de $f$ |
| El mayor valor en cada subintervalo | $\rightarrow$ suma superior de $f$ |
| Cualquier valor en cada subintervalo | $\rightarrow$ suma de Riemann de $f$ |

Al tomar el límite $\Delta x \rightarrow 0$ si todas las sumas coinciden, decimos que la función es **integrable Riemann**.

**Nota.** Cualquier función continua a trozos es integrable.

Tenemos la siguiente definición de integral definida:

**Definición 4.1.1** *Dada una función integrable $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, se dividimos el intervalo en $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x$, eligiendo cualquier punto $x_i^\star$ en cada subintervalo, entonces se define la integral definida o la integral de Riemann de $f(x)$ de $a$ a $b$ como*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x.$$

**Nota.** Los métodos numéricos se basan en este concepto de calcular una integral aproximando el valor de la función en cada subintervalo por una constante o por un polinomio, mucho más sencillo de integrar.

**Propiedades de la integral**

1. $\displaystyle\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\displaystyle\int_a^a f = 0$
5. $\displaystyle\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$
6. $\displaystyle f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
7. $\displaystyle f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

   si $\displaystyle f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq 0$
8. $\displaystyle \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
9. $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

## LA INTEGRAL INDEFINIDA

Geométricamente, la derivada surge al hallar la pendiente de una curva y la integral al calcular el área bajo una curva, pero Newton descubrió, además, que **derivar e integrar son procesos inversos:**

- **Derivación:** dada una función $F(x)$, halla una función $f(x)$ que satisfaga

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

- **Integración:** dada una función $f(x)$, halla una función $F(x)$ que satisfaga

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Una función $F(x)$ que resuelve el último problema se llama una **primitiva**, **antiderivada** o **integral indefinida** de $f(x)$.
El problema de derivación siempre tiene solución pero el de integración no siempre tiene solución y, en general, suele ser mucho más complicado.

## TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Aquí veremos la técnicas más comunes para calcular la integral (definida o indefinida) de una función.

### Primitivas básicas

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

$$\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \operatorname{senh} x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x = \operatorname{senh} x + c$$

### Integración mediante cambio de variables o por substitución (CV)

- Integral definida

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

- Integral indefinida

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

al final, hay que deshacer el cambio

### Integración por partes (IPP)

- Integral definida

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Integral indefinida

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

## Integración de funciones racionales: descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \to P,\ Q \text{ polinomios.}$$

- Si el grado de $P \geq$ grado de $Q \Rightarrow$ debemos **dividir** los polinomios: $P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \rightarrow$
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$
- $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(R(x)) <$ grado$(Q(x))$:

  i) Primero, debemos comprobar que la integral no sea inmediata, es decir, si es del tipo:

  tipo ln $\rightarrow \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+8}dx = \ln|x^2+3x+8| + c.$

  tipo arctan $\rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8} = \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} + c.$

  ii) Si no lo es $\rightarrow$ **Haremos descomposición en fracciones simples:**

| Factor en el denominador | Término en la descomposición en fracciones simples |
|---|---|
| $x-b$ | $\dfrac{A}{x-b}$ |
| $(x-b)^k$ | $\dfrac{A_1}{x-b} + \dfrac{A_2}{(x-b)^2} + \cdots \dfrac{A_k}{(x-b)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ |
| $(x-a)^2 + b^2$ | $\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$ |
| $\left((x-a)^2+b^2\right)^k$ | $\dfrac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \dfrac{A_2x+B_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2} + \cdots + \dfrac{A_kx+B_k}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ |

Para cada factor en el denominador debemos añadir el término correspondiente de la tabla y calcular las incógnitas $(A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots)$ igualando los denominadores. Después hay que calcular la integral de cada término.

---

A partir de aquí, $R = \dfrac{P}{Q}$ denota una función racional en sus argumentos, $P,\ Q$ son polinomios.

---

## Funciones irracionales o integrales con raíces

Haremos un cambio de variables para eliminar las raíces.

$$\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r/q_r}\right] \to t^m = \frac{ax+b}{cx+d},\ m = \mathrm{mcm}(q_1,\cdots,q_r).$$

mcm$\to$ mínimo común múltiplo.

## Integrales de funciones trigonométricas

$\int \operatorname{sen}^{2n} x$, $\int \cos^{2n} x \to$ fórmulas de ángulo doble: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\int \operatorname{sen}^{2n+1} x = \int \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x = \int (1-\cos^2 x)^n \operatorname{sen} x$

$\int \cos^{2n+1} x = \int \cos^{2n} x \cos x = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^n \cos x$

$\int \operatorname{sen} mx \cos nx \to$ fórmulas trigonométricas

$$\int R(\operatorname{sen} x,\cos x) \to \begin{array}{ll} R \text{ impar en } \operatorname{sen} x \to & t=\cos x \\ R \text{ impar en } \cos x \to & t=\operatorname{sen} x \\ R \text{ par en } \cos x \text{ y } \operatorname{sen} x \to & t=\tan x \\ \text{Resto de problemas} \to & t=\tan x/2, \\ \left(\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt\right) & \end{array}$$

## Algunos cambios de variables

1. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+a^2}) \to x = a\tan t$

2. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-a^2}) \to x = \frac{a}{\cos t}$

3. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2-x^2}) \to x = a\operatorname{sen} t$

## 4.2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f$ integrable en [a,b], $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ definida en $[a, b]$.

**Teorema 4.2.1**

$$f \textit{ integrable en } [a,b] \Rightarrow F \textit{ continua en } [a,b]$$

**Teorema 4.2.2 (El Teorema Fundamental del Cálculo, TFC)**
*Sea $f$ integrable en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, definida $\forall x \in [a, b]$.*
*Si $f$ es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F$ es derivable en $c$ y $F'(c) = f(c)$.*
*Si $f$ es continua $\forall x \in [a, b] \Rightarrow F$ es derivable $\forall x \in [a, b]$ y $F'(x) = f(x)$.*

**Teorema 4.2.3 (Regla de Barrow)** *Sean $f$ y $g$ continuas en $[a, b]$ y $g$ derivable en $(a, b)$, de forma que $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, entonces*

$$\int_a^b f = \int_a^b g' = g(b) - g(a).$$

**Teorema 4.2.4 (TFC generalizado)** *Sea $F(x) = \int_a^x f$, con $f$ integrable*

- *Sea $H(x) = F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f$, entonces si $g$ es derivable, tenemos que*

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

- *Sea $H(x) = \int_{l(x)}^{g(x)} f$, entonces si $g$ y $l$ son derivables, tenemos que*

$$H'(x) = f(g(x))g'(x) - f(l(x))l'(x).$$

## 4.3. Aplicaciones de la Integral

### ÁREAS

- Área entre la **gráfica de una función** y el eje $x$, entre $a$ y $b$:

$$A = \int_a^b |f| dx$$

- Área entre las **gráficas de dos funciones** $f, g$, entre $a$ y $b$:

$$A = \int_a^b |f - g| dx$$

- Área con **ecuaciones paramétricas:** el área entre la gráfica de $x = x(t),\ y = y(t)$ y el eje $x$ entre $t = t_0$ y $t = t_1$ es:

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|$$

- Área en **coordenadas polares:** el área de la gráfica de $r = r(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

### VOLÚMENES

- **Volumen por secciones paralelas:** si $A(x)$ es el área de las secciones paralelas a lo largo de toda la longitud de un sólido, el volumen del sólido así definido entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

- **El método de discos:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $|f(x)|$ alrededor del eje $x$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

- **El método de capas:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $f(x) \geq 0$ alrededor del eje $y$ es

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

## LONGITUDES

- La **longitud del arco de curva** $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Si la curva viene dada en **forma paramétrica**, la longitud es

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

## INTEGRAL IMPROPIA

**Definición 4.3.1** *La siguiente integral*

$$\int_a^\infty f(x) = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x),$$

*se llama una* **integral impropia** *de* $f$. *Si el límite es finito decimos que la integral* **converge** *en otro caso, diremos que la integral diverge.*

**Teorema 4.3.2 (Criterio integral para series)** *Consideremos* $f \geq 0$ *una función monótona decreciente definida en* $x \geq 1$. *Sea* $a_n = f(n)$, *entonces*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \quad \text{y} \quad \int_1^\infty f(x)\, dx,$$

*tienen el mismo comportamiento, o ambas convergen o ambas divergen.*