UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

PROBLEMAS, CÁLCULO I, 1$^{\text{er}}$ CURSO

1. FUNCIONES DE VARIABLE REAL

GRADO EN INGENIERÍA EN:
SISTEMAS AUDIOVISUALES
SISTEMAS DE COMUNICACIÓN
TELEMÁTICA

Colección elaborada por
Arturo de PABLO
Elena ROMERA

1. Funciones de variable real.

1.1. La recta real.

Problema 1.1.1

I*)* Sean los números reales $0 < a < b$, $k > 0$. Demuestra las desigualdades

$$1) \quad a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b, \qquad 2) \quad \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

II*)* Demuestra que $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$.

III*)* Demuestra la desigualdad $|a-b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$, para todo $a, b \in I\!R$.

IV*)* Demuestra que:

$$a) \ \text{máx}\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad b) \ \text{mín}\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

V*)* Expresa con una sola fórmula la función $f(x) = (x)_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Problema 1.1.2 Descompón las expresiones en n en producto de factores para demostrar que para todo $n \in I\!N$ se tiene

I*)* $n^2 - n$ es par;

II*)* $n^3 - n$ es múltiplo de 6;

III*)* $n^2 - 1$ es múltiplo de 8 si n es impar.

Problema 1.1.3 Utiliza el método de inducción para demostrar las siguientes fórmulas:

$$i) \ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad ii) \ \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2; \qquad iii) \ \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problema 1.1.4 Demuestra por inducción

I*)* suma geométrica: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, para todo $n \in I\!N$, $r \neq 1$;

II*)* desigualdad de Bernoulli: $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo $n \in I\!N$, $h > -1$.

Problema 1.1.5 Demuestra por inducción que para todo $n \in I\!N$ se tiene

I*)* $10^n - 1$ es múltiplo de 9;

II*)* $10^n - (-1)^n$ es múltiplo de 11.

Problema 1.1.6

I*)* Demuestra que un número es múltiplo de 4 si y sólo si sus dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4.

II*)* Demuestra que un número es múltiplo de 2^k si y sólo si sus k últimas cifras forman un número múltiplo de 2^k.

III*)* Demuestra que un número es múltiplo de 3 (ó 9) si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 (ó 9). Es decir, $n = \sum_{j=0}^{N} a_j 10^j$ es múltiplo de 3 (ó 9) si y sólo si $\sum_{j=0}^{N} a_j$ es múltiplo de 3 (ó 9).

IV*)* Demuestra que un número es múltiplo de 11 si y sólo si la suma de sus cifras colocadas en lugar par menos la suma de sus cifras colocadas en lugar impar es múltiplo de 11, es decir, $\sum_{j=0}^{N} (-1)^j a_j$ es múltiplo de 11.

Indicaciones: *ii*) escribe el número en la forma $n = 10^k a + b$, con $a \geq 0$, $0 \leq b < 10^k$; *iii*) y *iv*) utiliza el problema 1.1.5.

Problema 1.1.7 Demuestra por inducción y utilizando el binomio de Newton, que para todo $n \in I\!N$ se tiene

I*)* $n^3 - n$ es múltiplo de 6;

II*)* $n^5 - n$ es múltiplo de 5.

Problema 1.1.8 Prueba que:

I*)* si $n \in I\!N$ no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$;

II*)* $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Indicación: *i*) escribe $n = z^2 r$, donde r no contiene ningún factor cuadrado.

Problema 1.1.9 Encuentra el conjunto de los $x \in I\!R$ que verifican:

i) $A = \{\, |x-3| \leq 8 \,\}$, *ii*) $B = \{\, 0 < |x-2| < 1/2 \,\}$,

iii) $C = \{\, x^2 - 5x + 6 \geq 0 \,\}$, *iv*) $D = \{\, x^3(x+3)(x-5) < 0 \,\}$,

v) $E = \{\, \dfrac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0 \,\}$, *vi*) $F = \{\, \dfrac{4}{x} < x \,\}$,

vii) $G = \{\, 4x < 2x + 1 \leq 3x + 2 \,\}$, *viii*) $H = \{\, |x^2 - 2x| < 1 \,\}$,

ix) $I = \{\, |x-1||x+2| = 10 \,\}$, *x*) $J = \{\, |x-1| + |x-2| > 1 \,\}$.

Problema 1.1.10 Dados dos números reales $a < b$, definimos, para cada $t \in I\!R$ el número $x(t) = (1-t)a + tb$. Describe los siguientes conjuntos de números:

i) $A = \{\, x(t) \,:\, t = 0,\, 1,\, 1/2 \,\}$, *ii*) $B = \{\, x(t) \,:\, t \in (0,1) \,\}$,

iii) $C = \{\, x(t) \,:\, t < 0 \,\}$, *iv*) $D = \{\, x(t) \,:\, t > 1 \,\}$.

Problema 1.1.11 Halla el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (caso de existir), de los siguientes conjuntos de números reales:

I*)* $A = \{-1\} \cup [2,3)$;

II*)* $B = \{3\} \cup \{2\} \cup \{-1\} \cup [0,1]$;

III) $C = \{\, x = 2 + 1/n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$;

IV) $D = \{\, x = (n^2 + 1)/n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$;

V) $E = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, 3x^2 - 10x + 3 \leq 0 \,\}$;

VI) $F = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0 \,\}$, con $a < b < c < d$ fijados;

VII) $G = \{\, x = 2^{-p} + 5^{-q} \,:\, p, q \in \mathbb{N} \,\}$;

VIII) $H = \{\, x = (-1)^n + 1/m \,:\, n, m \in \mathbb{N} \,\}$.

Problema 1.1.12 Representa en el plano $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:

i) $A = \{\, |x - y| < 1 \,\}$,

ii) $B = \{\, x^2 < y < x \,\}$,

iii) $C = \{\, x + y \in \mathbb{Z} \,\}$,

iv) $D = \{\, |2x| + |y| = 1 \,\}$,

v) $E = \{\, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 4 \,\}$,

vi) $F = \{\, |1 - x| = |y - 1| \,\}$,

vii) $G = \{\, 4x^2 + y^2 \leq 4,\ xy \geq 0 \,\}$,

viii) $H = \{\, 1 \leq x^2 + y^2 < 9,\ y \geq 0 \,\}$.

Problema 1.1.13 Demuestra que las rectas $y = mx+b$, $y = nx+c$ son ortogonales si $mn = -1$.

Problema 1.1.14 Sea el triángulo en el plano formado por los puntos $(a, 0)$, $(-b, 0)$ y $(0, c)$, con $a, b, c > 0$.

I) Calcula el punto de corte de las tres alturas.

II) Calcula el punto de corte de las tres medianas.

III) ¿Cuándo coinciden estos dos puntos?

Problema 1.1.15

I) Sea la parábola $G = \{y = x^2\}$, y el punto $P = (0, 1/4)$. Halla $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los puntos de G equidistan de P y de la recta horizontal $L = \{y = \lambda\}$.

II) Inversamente, el conjunto G tal que sus puntos equidistan de un punto $P = (a, b)$ y de una recta $L = \{y = \lambda\}$, es la parábola $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Halla α, β, γ.

Problema 1.1.16

I) Halla el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es $2a$, $(a > c)$.

II) La misma cuestión sustituyendo suma por diferencia (con $a < c$).

1.2. Funciones elementales.

Problema 1.2.1 Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$i)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6},\qquad ii)\quad f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1},$$

$$iii)\quad f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}},\qquad iv)\quad f(x)=\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}},$$

$$v)\quad f(x)=\frac{1}{1-\log x},\qquad vi)\quad f(x)=\log(x-x^2),$$

$$vii)\quad f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\log x},\qquad viii)\quad f(x)=\operatorname{arc\,sen}(\log x).$$

Problema 1.2.2

I) Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$?

II) ¿Y si f es par y g impar?

Problema 1.2.3 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$i)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad ii)\quad f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1},$$

$$iii)\quad f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad iv)\quad f(x)=(\cos x^3)(\operatorname{sen} x^2)\mathrm{e}^{-x^4},$$

$$v)\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x},\qquad vi)\quad f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Indicación: vi) es impar.

Problema 1.2.4 ¿Para qué números $a,b,c,d\in I\!R$ se tiene que la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ satisface $f\circ f=I$ (la identidad) en el dominio de f?

Problema 1.2.5 Comprueba que la función $f(x)=\dfrac{x+3}{1+2x}$ es biyectiva definida de $I\!R-\{-1/2\}$ en $I\!R-\{1/2\}$ y calcula su inversa.

Problema 1.2.6

I) Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean, o un ejemplo de dos puntos con la misma imagen en caso de que no lo sean.

$$a)\quad f(x)=7x-4,\qquad b)\quad f(x)=\operatorname{sen}(7x-4),$$

$$c)\quad f(x)=(x+1)^3+2,\qquad d)\quad f(x)=\frac{x+2}{x+1},$$

$$e)\quad f(x)=x^2-3x+2,\qquad f)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+1}.,$$

$$g)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x},\qquad h)\quad f(x)=\log(x+1).$$

II) Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sí es inyectiva en $(3/2, \infty)$.

III) Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sí es inyectiva en $(1, \infty)$ y encuentra $f^{-1}(\sqrt{2}/3)$.

IV) Estudia si las funciones anteriores son sobreyectivas y si son biyectivas definidas en su dominio $D(f)$ en $\mathbb{R}$.

Problema 1.2.7 Demuestra que $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ se puede escribir como $A \operatorname{sen}(x + B)$, y encuentra A y B.

Problema 1.2.8 Calcula

$$
\begin{array}{rl}
i) & \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{3}, \\[2ex]
ii) & \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3, \\[2ex]
iii) & \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{8}.
\end{array}
$$

Indicación: utiliza la fórmula de la tangente de la suma y estudia los signos.

Problema 1.2.9 Simplifica las siguientes expresiones

$$
\begin{array}{rlrl}
i) & f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x), & ii) & f(x) = \operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,sen} x), \\[1.5ex]
iii) & f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,cos} x), & iv) & f(x) = \operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,tg} x), \\[1.5ex]
v) & f(x) = \cos(2 \operatorname{arc\,tg} x), & vi) & f(x) = \mathrm{e}^{4 \log x}.
\end{array}
$$

Problema 1.2.10 Resuelve el sistema de ecuaciones, para $x, y > 0$,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x^y = y^x \\
y = 3x.
\end{array}
\right.
$$

Problema 1.2.11 Describe la función g en términos de f en los siguientes casos ($c \in \mathbb{R}$ es una constante). Dibújalas para $f(x) = x^2$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$
\begin{array}{rlrl}
i) & g(x) = f(x) + c, & ii) & g(x) = f(x + c), \\[1.5ex]
iii) & g(x) = f(cx), & iv) & g(x) = f(1/x), \\[1.5ex]
v) & g(x) = f(|x|), & vi) & g(x) = |f(x)|, \\[1.5ex]
vii) & g(x) = 1/f(x), & viii) & g(x) = (f(x))_+ = \max\{f(x), 0\}.
\end{array}
$$

Problema 1.2.12 Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

i)	$f(x) = (x+2)^2 - 1,$	*ii)*	$f(x) = \sqrt{4-x},$
iii)	$f(x) = x^2 + 1/x,$	*iv)*	$f(x) = 1/(1+x^2),$
v)	$f(x) = \min\{x, x^2\},$	*vi)*	$f(x) = \lvert e^x - 1\rvert,$
vii)	$f(x) = \sqrt{x - [x]},$	*viii)*	$f(x) = 1/[1/x],$
ix)	$f(x) = \lvert x^2 - 1\rvert,$	*x)*	$f(x) = 1 - e^{-x},$
xi)	$f(x) = \log(x^2 - 1),$	*xii)*	$f(x) = x \operatorname{sen}(1/x).$

Indicación: $[x] = n$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero $n \leq x$.

Problema 1.2.13 Definimos las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I*)* Estudia su simetría.

II*)* Demuestra las fórmulas

$$a)\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad b)\ \operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x.$$

III*)* Simplifica la función $f(x) = \operatorname{senh}^{-1} x$.

IV*)* Esboza la gráfica de las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

Problema 1.2.14 Esboza las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

i)	$r = 1, \quad \theta \in [0, \pi],$	*ii)*	$\theta = 3\pi/4, \quad r \geq 2,$
iii)	$r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$	*iv)*	$r = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$
v)	$r = e^\theta, \quad \theta \in [-2\pi, 2\pi],$	*vi)*	$r = \sec \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2],$
vii)	$r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$	*viii)*	$r = (\cos 2\theta)_+, \quad \theta \in [0, 2\pi],$
ix)	$r = \lvert\cos 2\theta\rvert, \quad \theta \in [0, 2\pi],$	*x)*	$r = (\operatorname{sen} 3\theta)_+, \quad \theta \in [0, 2\pi/3].$

Problema 1.2.15 Esboza los siguientes conjuntos en el plano dados en coordenadas polares:

i)	$A = \{\, 1 < r < 4 \,\},$	*ii)*	$B = \{\, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3 \,\},$
iii)	$C = \{\, r \leq \theta,\ 0 \leq \theta \leq 3\pi/2 \,\},$	*iv)*	$D = \{\, r \leq \sec \theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \,\}.$

1.3. Límites de funciones.

Problema 1.3.1 Utilizando la definición ε–δ de límite prueba que:

i) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, *ii)* $\lim_{x\to 3}(5x-1) \neq 16$,

iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0$, *iv)* $\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$.

Problema 1.3.2 Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

i) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a}$, *ii)* $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$,

iii) $\lim_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$, *iv)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,

v) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1-h)^3}-1}{h}$, *vi)* $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$.

Problema 1.3.3 Utilizando los límites $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, calcula los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} 2x^3)^2}{x^6}$, *ii)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x^2 + 2x}{x+x^2}$, *iv)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+a) - \operatorname{sen} a}{x}$,

v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$, *vi)* $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$,

vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1-2x)}{\operatorname{sen} x}$, *viii)* $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{2/x}$,

ix) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$, *x)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

xi) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - x}}$, *xii)* $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$,

xiii) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}(x/2)}{(x-\pi)^2}$, *xiv)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

Indicación: será preciso utilizar algún cambio de variables y el límite de la composición.

Problema 1.3.4 Calcula los siguientes límites:

i) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}},$ *ii)* $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x^3}{5x+6},$

iii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}},$ *iv)* $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right),$

v) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$ *vi)* $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$

vii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}},$ *viii)* $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}.$

Problema 1.3.5 Calcula los límites laterales:

i) $\displaystyle \lim_{t\to0^+} \left(\frac{1}{t}\right)^{[t]},$ *ii)* $\displaystyle \lim_{t\to0^-} \left(\frac{1}{t}\right)^{[t]},$

iii) $\displaystyle \lim_{t\to0^+} \mathrm{e}^{1/t},$ *iv)* $\displaystyle \lim_{t\to0^-} \mathrm{e}^{1/t}.$

Problema 1.3.6 Calcula los límites

i) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}},$ *ii)* $\displaystyle \lim_{t\to0} \frac{1-\mathrm{e}^{1/t}}{1+\mathrm{e}^{1/t}}$

Problema 1.3.7

I*)* Determina la relación entre a y b para que

$$\lim_{x\to1} x^{a/(1-x)} = \lim_{x\to0} (\cos x)^{b/x^2}.$$

II*)* Si $f(x)=\log(\log x)$ y $\alpha>0$, halla $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-f(\alpha x))$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-f(x^\alpha))$.

Problema 1.3.8

I*)* Demuestra que si $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)=0$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)\operatorname{sen} 1/x = 0$.

II*)* Calcula $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{2+\operatorname{sen} 1/x}$.

1.4. Continuidad

Problema 1.4.1

I*)* Prueba que si f es continua en un punto a y g lo es en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es continua en a.

II*)* Demuestra que si f es continua, entonces $|f|$ también lo es. ¿Es cierto el recíproco?

III*)* ¿Qué puede decirse de una función continua que toma valores sólo en $\mathbb{Q}$?

Problema 1.4.2 Halla $\lambda \in I\!R$ para que la función $b(x) = \dfrac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}$ sea continua en:

$$i)\ I\!R, \qquad ii)\ [0,1].$$

Problema 1.4.3 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- I) $f(x) = \dfrac{e^{-5x} + \cos x}{x^2 - 8x + 12}$;
- II) $g(x) = e^{3/x} + x^3 - 9$;
- III) $h(x) = x^3 \operatorname{tg}(3x+2)$;
- IV) $j(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
- V) $k(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^3$;
- VI) $m(x) = (x-5)\log(8x-3)$;

Problema 1.4.4 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- I) $f(x) = x - [x]$;
- II) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$
- III) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x < 0; \end{cases}$
- IV) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Problema 1.4.5 Demuestra los siguientes teoremas de punto fijo:

- I) Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Entonces existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.
- II) Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow I\!R$ dos funciones continuas tales que $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.