UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

PROBLEMAS, CÁLCULO I, 1$^{\text{er}}$ CURSO

2. CÁLCULO DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE

GRADO EN INGENIERÍA EN:
SISTEMAS AUDIOVISUALES
SISTEMAS DE COMUNICACIÓN
TELEMÁTICA

Colección elaborada por
Arturo de PABLO
Elena ROMERA

2. Cálculo diferencial de una variable.

2.1. Derivabilidad

Problema 2.1.1 Sean f, g funciones derivables en todo $I\!R$. Escribe la derivada de las siguientes funciones en su dominio:

$$\begin{array}{llll} i) & h(x) = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, & ii) & h(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right), \\ iii) & h(x) = f(g(x))\mathrm{e}^{f(x)}, & iv) & h(x) = \log(g(x)\operatorname{sen}(f(x))), \\ v) & h(x) = (f(x))^{g(x)}, & vi) & h(x) = \dfrac{1}{\log(f(x) + g^2(x))}. \end{array}$$

Problema 2.1.2

I) Construye una función continua en todo $I\!R$ tal que se anule para $|x| \geq 2$, y valga uno para $|x| \leq 1$.

II) Construye otra que además sea derivable.

Problema 2.1.3 A partir de las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$, definimos las funciones $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ y $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$. Demuestra las fórmulas

$$\begin{array}{llll} i) & (\operatorname{senh} x)' = \cosh x, & ii) & (\cosh x)' = \operatorname{senh} x, \\ iii) & (\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x, & iv) & (\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x. \end{array}$$

Problema 2.1.4 Comprueba que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales especificadas, donde c, c_1 y c_2 son constantes.

$$\begin{array}{lll} i) & f(x) = \dfrac{c}{x}, & xf' + f = 0; \\ ii) & f(x) = x \operatorname{tg} x, & xf' - f - f^2 = x^2; \\ iii) & f(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x, & f'' + 9f = 0; \\ iv) & f(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}, & f'' - 9f = 0; \\ v) & f(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{5x}, & f'' - 7f' + 10f = 0; \\ vi) & f(x) = \log(c_1\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) + c_2, & f'' + (f')^2 = 1. \end{array}$$

Problema 2.1.5 Demuestra las identidades

$$\begin{array}{lll} i) & \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, & x > 0; \\ ii) & \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{4}, & x < 1; \\ iii) & 2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sen}\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi, & x \geq 1. \end{array}$$

Indicación: deriva y sustituye en algún punto del intervalo. El resultado *no* es cierto fuera de los intervalos especificados.

Problema 2.1.6 Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual la parábola $f(x) = ax^2$ es tangente a la curva $g(x) = \log x$, y escribe la ecuación de la tangente común.

Problema 2.1.7 Calcula en qué puntos la gráfica de la función $f(x) = x + (\operatorname{sen} x)^{1/3}$ tiene tangente vertical.

Problema 2.1.8 Calcula el ángulo que forman las tangentes por la derecha y por la izquierda en el origen a la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Problema 2.1.9 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

I) estudia su continuidad y derivabilidad;

II) ¿se puede aplicar el teorema del valor medio en [0,2]? En caso afirmativo halla el punto (o puntos) de la tesis del teorema.

Problema 2.1.10 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \sqrt{x+2}\,\arccos(x+2).$$

Problema 2.1.11 Calcula el mínimo valor de α para el que la función $f(x) = |\alpha x^2 - x + 3|$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Problema 2.1.12 La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en -1 y en 1 y, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ en $(-1, 1)$. Explica esta aparente contradicción con el teorema de Rolle.

Problema 2.1.13 Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c \\ |x|^{-1} & \text{si } |x| > c \end{cases}$, con $c > 0$, calcula a y b para que sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Problema 2.1.14 Utilizando el teorema del valor medio aproxima $26^{2/3}$ y $\log(3/2)$.

Problema 2.1.15

I) Si f es una función derivable, calcula

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+ph) - f(a-qh)}{h}.$$

II) ¿Puede existir el límite anterior para una función no derivable en $x = a$?

III) Si f es una función derivable y par, calcula $f'(0)$.

IV) Si f es una función dos veces derivable, calcula
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

Problema 2.1.16 Calcula los límites de los problemas **??** y **??** utilizando la regla de L'Hôpital, escribiéndolos previamente en la forma adecuada.

Problema 2.1.17 Calcula los siguientes límites:

$i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}x-1}{x^2},\qquad ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log|\operatorname{sen}7x|}{\log|\operatorname{sen}x|},$

$iii)\quad \lim_{x\to 1}\log x\cdot\log(x-1),\qquad iv)\quad \lim_{x\to\infty}x^{1/x},$

$v)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1+x}-1-x-x^2}{x^3},\qquad vi)\quad \lim_{x\to\infty}x\Big(\operatorname{tg}(2/x)-\operatorname{tg}(1/x)\Big).$

Problema 2.1.18 Calcula los siguientes límites:

$i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{x-1}}{(x-1)^x},\qquad ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-e^x}{\operatorname{arc\,tg}x},$

$iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3},\qquad iv)\quad \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{3/(2\operatorname{arc\,sen}x)},$

$v)\quad \lim_{x\to 1/2}(2x^2+3x-2)\operatorname{tg}(\pi x),\qquad vi)\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}x}{\sec x-1},$

$vii)\quad \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}),\qquad viii)\quad \lim_{x\to 0^+}x^{1/\log x}.$

Problema 2.1.19 Sea h una función dos veces derivable, y sea
$$f(x)=\begin{cases} h(x)/x^2 & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
Sabiendo que f es continua, calcula $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$.

Problema 2.1.20 Halla a para que $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^x-x}{x^2}$ sea finito y calcula el valor del límite.

Problema 2.1.21 Calcula los siguientes límites:

$i)\quad \lim_{x\to\infty}x\Big((1+1/x)^x-e\Big),\qquad ii)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)^{x^2}}{e^x},$

$iii)\quad \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2^{1/x}+18^{1/x}}{2}\Big)^x,\qquad iv)\quad \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}a_i^{1/x}\Big)^x,\ p\in\mathbb{N},\ a_i>0.$

Problema 2.1.22 Dada una función f derivable, que satisface $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x^3)}{5x^3}=1$,

I) justifica que $f(0) = 0$;

II) prueba que $f'(0) = 5/2$;

III) calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{(f\circ f)(2x)}{f^{-1}(3x)}$.

Problema 2.1.23 Utilizando el teorema del valor medio calcula el límite

$$\lim_{x\to\infty} \left[(1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right].$$

Problema 2.1.24

I) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcula los valores de x para los cuales se tiene $(f^{-1})'(x) = 5/4$.

II) La misma cuestión con $g(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ y $(g^{-1})'(x) = 2$.

Problema 2.1.25 La ecuación

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-f} f' = 2 + \operatorname{tg} x \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

define una función f uno a uno en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$, derivable. Se define la función $g(x) = f^{-1}(x+1)$. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{g(x)}.$$

Problema 2.1.26

I) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si f admite $k \geq 2$ raíces en $[a,b]$, entonces f' admite al menos $k-1$ raíces en $[a,b]$.

II) Si f es n veces derivable en $[a,b]$ y se anula en $n+1$ puntos distintos de $[a,b]$, prueba que $f^{(n)}$ se anula al menos una vez en $[a,b]$.

Problema 2.1.27 Calcula cuántas soluciones tienen las ecuaciones siguientes en los intervalos especificados:

i)	$x^7 + 4x = 3$,	en $\mathbb{R}$;	*ii)*	$x^5 = 5x - 6$,	en $\mathbb{R}$;
iii)	$x^4 - 4x^3 = 1$,	en $\mathbb{R}$;	*iv)*	$\operatorname{sen} x = 2x - 1$,	en $\mathbb{R}$;
v)	$x^x = 2$,	en $[1,\infty)$;	*vi)*	$x^2 = \log(1/x)$,	en $(1,\infty)$.

2.2. Extremos de funciones.

Problema 2.2.1 Sea la función $f(x) = |x^3(x-4)| - 1$.

I) Estudia su continuidad y derivabilidad.

II) Calcula sus extremos relativos.

III) Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$.

Problema 2.2.2 Una empresa de tomate en salsa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál deberá ser la relación entre el radio r de la base de la lata y su altura h, para que la construcción requiera el mínimo gasto de material?

Problema 2.2.3 Halla el área del rectángulo, de lados paralelos a los ejes e inscrito en la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, de área máxima.

Problema 2.2.4 Halla el área del triángulo, formado por la tangente a la parábola $y = 6 - x^2$ y los semiejes positivos, que tiene área mínima.

Problema 2.2.5 Un triángulo rectángulo ABC tiene el vértice A en el origen, B sobre la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$, y el cateto AC sobre el eje horizontal. Calcula C para que el área del triángulo sea máxima.

Problema 2.2.6 Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto del primer cuadrante. Traza una recta que pase por P y corte a los ejes en $A = (x_0 + \alpha, 0)$ y $B = (0, y_0 + \beta)$ respectivamente. Calcula $\alpha, \beta > 0$. de manera que sea mínima:

i*)* la longitud de AB;

ii*)* la longitud de OA más la de OB;

iii*)* el área del triángulo OAB.

Indicación: $\beta = x_0 y_0 / \alpha$.

Problema 2.2.7

i*)* Demuestra la desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^a \geq 1 + ax$, para todo $a \geq 1$, $x > -1$.

ii*)* Demuestra que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

iii*)* Demuestra que $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ para todo $x > -1$.

Indicación: minimiza las funciones apropiadas.

Problema 2.2.8 Demuestra que si $a > 0$, la función $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ crece, para $x > 0$, desde 1 hasta e^a.
Indicación: utiliza las estimaciones anteriores.

Problema 2.2.9 Demuestra por inducción la desigualdad $n^n < n!\,\mathrm{e}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.2.10

i*)* Demuestra que $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$.

ii*)* Concluye que $\mathrm{e}^x > x^{\mathrm{e}}$ para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$.

Problema 2.2.11 Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 1]$.

2.3. Representación gráfica.

Problema 2.3.1 Demuestra que si f y g son funciones convexas dos veces derivables, y f es creciente, entonces $h = f \circ g$ es convexa.

Problema 2.3.2

I) Esboza la gráfica de la función $f(x) = x + \log|x^2 - 1|$.

II) A partir de ella dibuja la gráfica de las funciones

$$a)\quad g(x) = |x| + \log|x^2-1|, \qquad b)\quad h(x) = \Big|x + \log|x^2-1|\Big|.$$

Problema 2.3.3 Representa gráficamente las funciones siguientes:

$$
\begin{array}{llllll}
i) & y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x, & ii) & y = \sqrt{x^2-1} - 1, & iii) & y = x\mathrm{e}^{1/x}, \\
iv) & y = x^2\mathrm{e}^x, & v) & y = (x-2)x^{2/3}, & vi) & y = (x^2-1)\log\dfrac{1+x}{1-x}, \\
vii) & y = \dfrac{x}{\log x}, & viii) & y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & ix) & y = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{1-x}, \\
x) & y = \log[(x-1)(x-2)], & xi) & y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x(x-1)}, & xii) & y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \\
xiii) & y = \dfrac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}, & xiv) & y = \sqrt{|x-4|}, & xv) & y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, \\
xvi) & y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 1}, & xvii) & y = \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x, & xviii) & y = x^2\operatorname{sen}(1/x).
\end{array}
$$

Problema 2.3.4 Representa la gráfica de las funciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
i) & f(x) = \min\{\log|x^3-3|, \log|x+3|\}, & ii) & g(x) = \dfrac{1}{|x|-1} - \dfrac{1}{|x-1|}, \\
iii) & h(x) = \dfrac{1}{1+|x|} - \dfrac{1}{1+|x-a|}, \quad a > 0, & iv) & k(x) = x\sqrt{|x^2-1|}, \\
v) & p(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log(|x^2-1|)), & vi) & w(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sen}\Big(\dfrac{2x}{1+x^2}\Big).
\end{array}
$$

Problema 2.3.5 Representa la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+x}, \qquad x \neq 0; \qquad f(0) = 0.$$

y estudia razonadamente cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$.

Problema 2.3.6 Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x}{3+x^2}$, representa la gráfica de las funciones

$$i)\quad g(x) = \sup_{y>x} f(y), \qquad ii)\quad h(x) = \inf_{y>x} f(y).$$

Problema 2.3.7

I) Calcula la imagen de la función $f(x) = 1 + (\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

II) Calcula los valores de $A \in I\!R$ tales que la función

$$g(x) = \frac{1}{A + \log f(x)},$$

sea continua en todo $I\!R$.

III) Calcula el supremo y el ínfimo de g si $A = 1$.

IV) Esboza la gráfica de g en este último caso.

Problema 2.3.8 Se considera la función $f(x) = \log(1 + x^2)$.

I) Calcula las rectas tangentes en sus puntos de inflexión y esboza la gráfica de f y de estas rectas.

II) Demuestra que la función $g(x) = \text{máx}\{\, f(x),\, |x| + \alpha\,\}$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en cualquier intervalo $[a, b] \subset I\!R$ si y sólo si $\alpha = \log 2 - 1$.

III) Para el anterior valor de α, obtén el punto o puntos cuya existencia garantiza el mencionado teorema aplicado a la función g en el intervalo $[-1, 2]$.

2.4. Polinomio de Taylor.

Problema 2.4.1 Escribe el polinomio de Taylor de orden 5 alrededor del origen para las funciones siguientes:

$$i)\quad e^x \operatorname{sen} x, \qquad ii)\quad e^{-x^2}\cos 2x, \qquad iii)\quad \operatorname{sen} x \cos 2x,$$

$$iv)\quad e^x \log(1-x), \qquad v)\quad (\operatorname{sen} x)^2, \qquad vi)\quad \frac{1}{1-x^3}.$$

Problema 2.4.2 Escribe el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en potencias de $x - 4$.

Problema 2.4.3 Escribe el polinomio de Taylor de orden n alrededor del punto que se indica, de las siguientes funciones:

I) $f(x) = 1/x$ en $a = -1$;

II) $f(x) = xe^{-2x}$ en $a = 0$;

III) $f(x) = (1 + e^x)^2$ en $a = 0$.

Problema 2.4.4 Demuestra las fórmulas

$$i)\quad \operatorname{sen} x = o(x^\alpha), \quad \forall\, \alpha < 1, \qquad \text{cuando } x \to 0;$$

$$ii)\quad \log(1 + x^2) = o(x), \qquad \text{cuando } x \to 0;$$

$$iii)\quad \log x = o(x), \qquad \text{cuando } x \to \infty;$$

$$iv)\quad \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = o(x^2), \qquad \text{cuando } x \to 0.$$

Problema 2.4.5 Demuestra las fórmulas

$$i)\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x), \qquad \text{cuando } x \to 0;$$

$$ii)\quad \operatorname{sen}(o(x)) = o(x), \qquad \text{cuando } x \to 0;$$

$$iii)\quad \operatorname{sen}(f(x) + o(x)) = \operatorname{sen}(f(x)) + o(x), \qquad \text{cuando } x \to 0.$$

Indicación: *ii)* significa que si g es tal que $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(g(x))}{x} = 0$.

Problema 2.4.6 Calcula los siguientes límites utilizando el Teorema de Taylor:

$$i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}, \qquad ii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5},$$

$$iii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}, \qquad iv)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3},$$

$$v)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos 3x)}, \qquad vi)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3},$$

$$vii)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right), \qquad viii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right),$$

$$ix)\quad \lim_{x\to \infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}), \qquad x)\quad \lim_{x\to \infty} \left[x - x^2 \log(1 + 1/x)\right].$$

Problema 2.4.7 Calcula el polinomio de Taylor de orden 4 en el origen para la función $f(x) = 1 + x^3 \operatorname{sen} x$ y decide si f tiene en ese punto un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.

Problema 2.4.8

I*)* Calcula aproximadamente el valor de $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3. ¿Cuál es el error cometido?

II*)* Aproxima $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2. Evalúa el error cometido.

Problema 2.4.9

I*)* Aproxima la función $f(x) = \cos x + e^x$ mediante un polinomio de tercer grado alrededor del origen.

II*)* Estima el error cometido cuando se utiliza la aproximación anterior para $x \in [-1/4, 1/4]$.

Problema 2.4.10 ¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de Taylor alrededor del origen de la función $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que la aproxime en $[-1, 1]$ con tres cifras decimales exactas?