UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

PROBLEMAS, CÁLCULO I, 1er CURSO

3. SUCESIONES Y SERIES

GRADO EN INGENIERÍA EN:
SISTEMAS AUDIOVISUALES
SISTEMAS DE COMUNICACIÓN
TELEMÁTICA

Colección elaborada por
Arturo de PABLO
Elena ROMERA

3. Sucesiones y series.

3.1. Sucesiones de números reales.

Problema 3.1.1

I) Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente e $\{y_n\}$ una divergente; ¿qué se puede decir de la sucesión producto $\{x_n y_n\}$, suma $\{x_n + y_n\}$, y cociente $\{y_n/x_n\}$ (suponiendo que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$)?

II) Prueba que si $\{x_n\}$ es convergente, entonces la sucesión $\{|x_n|\}$ también es convergente. ¿Es cierto el recíproco?

III) ¿Qué se puede decir de una sucesión de números enteros que es convergente?

IV) Demuestra que toda sucesión convergente es acotada.

Problema 3.1.2 Dadas las siguientes sucesiones en forma recurrente, escribe el término general y calcula el límite.

$$i)\ a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \qquad ii)\ b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \sqrt{2b_n}\,.$$

Problema 3.1.3 Calcula los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad (a>0), \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} n^{-3/n},$$

$$iii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad (a,b>0), \qquad iv)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n, \quad (a,b>0),$$

$$v)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right), \qquad vi)\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt{n+1}),$$

$$vii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}, \qquad viii)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3n}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}.$$

Problema 3.1.4 Calcula los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \operatorname{sen} n\pi, \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n(\mathrm{e}^{1/n} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} 1/n})}{1 - n \operatorname{sen} 1/n},$$

$$iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}, \qquad iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$$

$$v)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad vi)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n},$$

$$vii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}, \qquad viii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}.$$

Problema 3.1.5 Calcula los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{b}{n} + a \operatorname{sen}\frac{b}{n}\right)^n; \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[u_n]{\frac{a - bu_n}{a + u_n}}, \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0,\ a > 0.$$

Problema 3.1.6 Calcula los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{\pi}{k}}{\log n}, \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (2k-1)^{1/n^2}, \qquad iii)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \operatorname{sen}\frac{1}{k}.$$

Problema 3.1.7 Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, halla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}}{\log(n+1)}.$$

Problema 3.1.8 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos que verifica $\lim_{n\to\infty}(a_n - n) = L$.

I) Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

II) Demuestra que $\lim_{n\to\infty} n \log(a_n/n) = L$.

Problema 3.1.9 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Calcula, utilizando el criterio de Stolz, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{a_n^n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}}.$$

Problema 3.1.10 Demuestra las fórmulas, para $n \to \infty$,

$$i)\ \operatorname{sen}(\pi n + o(1)) = o(1), \qquad ii)\ \operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2n}) + o(\frac{1}{n}).$$

Indicación: utiliza el problema **??**.

Problema 3.1.11 Demuestra que las siguientes sucesiones son monótonas, estudia si son acotadas, y calcula el límite caso de existir.

$$\begin{array}{llll} i) & \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots & ii) & \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots \\ iii) & u_{n+1} = 3 + \frac{u_n}{2}, \qquad u_0 = 0. & iv) & u_{n+1} = 3 + 2u_n, \qquad u_0 = 0. \\ v) & u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 6}{7}, & & a)\ u_0 = 1/2, \quad b)\ u_0 = 3/2, \quad c)\ u_0 = 3. \end{array}$$

Problema 3.1.12 Se considera la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{1+3a_n} - 1,\ a_0 = 1/2$.

I) Demuestra que es convergente y calcula su límite.

II) Calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n - 1}$.

Problema 3.1.13 Sea la sucesión definida por $b_{n+1} = 1 - \frac{b_n}{2}$, con $b_0 = 0$.

I) Comprueba que se trata de una sucesión oscilante, $\operatorname{signo}(b_{n+1} - b_n) = -\operatorname{signo}(b_n - b_{n-1})$.

II) Calcula el posible límite ℓ.

iii) Demuestra que se tiene $|b_{n+1}-\ell| = \frac{1}{2}|b_n-\ell|$.

iv) Demuestra que efectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Indicación: *iii*) $|b_n-\ell| = (\frac{1}{2})^n\,|b_0-\ell|$.

Problema 3.1.14 Considera la sucesión definida por $c_{n+1} = f(c_n)$, donde $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $c_0 = 0$. Demuestra que es convergente mediante los pasos siguientes:

i) Calcula el posible límite ℓ.

ii) Demuestra que si $x \in [1/2, 1]$ entonces $f(x) \in [1/2, 1]$.

iii) Demuestra que $c_n \in [1/2, 1]$ para todo $n \geq 1$.

iv) Comprueba que se tiene $|f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [1/2, 1]$. Esto implicará $|c_{n+1}-\ell| \leq k^n|c_1-\ell| \to 0$.

Problema 3.1.15

i) Utiliza la técnica del problema anterior con la sucesión

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = 2 + \frac{4}{d_n},\ n \geq 0,$$

y el intervalo $[3, 10/3]$.

ii) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_{n+1}-\ell}{d_n-\ell}$.

Problema 3.1.16 Se considera la sucesión de números reales definida de forma recurrente

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}(1+x_{n-1})}{1+2x_{n-1}}\,.$$

Demuestra que es convergente y calcula su límite.

Problema 3.1.17 Describe el comportamiento de las sucesiones recurrentes de los problemas anteriores, representando en dos ejes cartesianos cada par de términos consecutivos (*diagrama de la telaraña*).

3.2. Series de números reales

Problema 3.2.1 Estudia la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$, *ii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$, *iii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^4+1}}$,

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, *v)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2+n}$, *vi)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\frac{1}{n^2})$,

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})$, *viii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$, *ix)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$,

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$, *xi)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}3^{-n}$, *xii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}$,

xiii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$, *xiv)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(\log n)^n}$, *xv)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}[\sqrt{n^2+1}-n]$,

xvi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log(\frac{n+1}{n})$, *xvii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\log n}}$, *xviii)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

Indicaciones: (en general se puede aplicar más de un criterio); *i*), *viii*), *x*), *xi*), *xiii*), *xiv*), criterio de la raíz; *ix*), criterio del cociente; *ii*), *iii*), *iv*), *v*), *vi*), *vii*), *xv*), *xvi*), *xvii*), *xviii*), comparación; *xii*), calcula el límite (ver **??** *ii*)).

Problema 3.2.2 Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n+1}\Big)$$

es convergente si y sólo si $a=b$.

Problema 3.2.3

I*)* Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(1+a)^n\mathrm{e}^{-an}$, según los valores de $a>-1$.

II*)* La misma pregunta para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{a^n n!}$, según los valores de $a>0$.

III*)* La misma pregunta para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+a}}$, según los valores de $a\in\mathbb{R}$.

Indicaciones: *ii*) y *iii*) utiliza la fórmula de Stirling.

Problema 3.2.4 Estudia la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series alternadas:

$$i)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \qquad ii)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi n + 1/n),$$

$$iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{arc\,tg} 1/n)^2, \qquad iv)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{arc\,tg} n)^2,$$

$$v)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2-1} - n], \qquad vi)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(\frac{n}{n+1}),$$

$$vii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\cos(1/n)), \qquad viii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(e^n + e^{-n})}.$$

Problema 3.2.5 Utilizando el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{arc\,tg} x$, estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Big).$$

Problema 3.2.6 Calcula cuántos términos hay que tomar para aproximar las siguientes sumas con un error menor que 10^{-3}:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Problema 3.2.7 Calcula la suma de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}, \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad iii)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+1}{3^n},$$

$$iv)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad v)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right].$$

Problema 3.2.8 Calcula la suma de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{[n/2]} b^{[(n+1)/2]}, \quad (|ab| < 1), \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos\frac{2n\pi}{3}.$$

Indicación: descompón las sumas en dos y tres sumandos respectivamente.

Problema 3.2.9

I*)* Demuestra que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 10^{-n}$, donde $b_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para $n \geq 1$ y $b_0 \in \mathbb{Z}$, converge. ¿Qué representa esta serie y cuál es su importancia?

II*)* Calcula la suma anterior para los casos:

$$a)\quad b_n = 9, \quad n \geq 0; \qquad b)\quad b_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 2 & n = 2k+1 \end{cases}, \quad k \geq 0.$$

Problema 3.2.10 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos que verifica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n) = L > 0$.

I) Demuestra que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\log(a_n/n)$ converge si y sólo si $\alpha < 0$.

II) Calcula los límites

$$P = \lim_{n\to\infty}\Big[\prod_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{i})\Big]^{1/n}, \qquad Q = \lim_{n\to\infty}\Big[\prod_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{i})^i\Big]^{1/n}.$$

Indicación: utiliza el problema 3.1.8.

Problema 3.2.11

I) Demuestra que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene una única solución λ_n en cada intervalo $((2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

II) Prueba que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n^2}$ es convergente.

Problema 3.2.12 Estudia la convergencia de las series

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\pi n(1+\frac{1}{2n^2})), \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

Indicación: utiliza el problema 3.1.10.

Problema 3.2.13 Sea la sucesión definida por $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n} - 1$, $x_0 = 1$.

I) Demuestra que es convergente y calcula su límite.

II) Calcula los límites

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}, \qquad b)\quad \lim_{n\to\infty} n x_n.$$

III) Estudia la convergencia de las series

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2.$$

Indicación: *ii.b*) aplica Stolz en forma conveniente; *iii*) aplica el apartado *ii*).

3.3. Series de Taylor.

Problema 3.3.1 Halla el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}, \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}, \qquad iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n-1}},$$

$$iv)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad v)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(3-2x)^n, \qquad vi)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{2n}}.$$

Problema 3.3.2 Desarrolla en serie de potencias la función $f_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^k}$, para $k = 1,\ 2,\ 3$.

Problema 3.3.3 Calcula el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)2^{-n}x^n.$$

Problema 3.3.4 Desarrolla en serie de potencias, indicando el dominio de validez del desarrollo, las funciones:

$$i) \quad f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \qquad ii) \quad f(x) = \frac{x}{a+bx}, \quad \text{con } a, b > 0,$$

$$iii) \quad f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad iv) \quad f(x) = \frac{1}{2-x^2}, \qquad v) \ f(x) = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Problema 3.3.5 Calcula la suma de las siguientes series

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

$$iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}, \qquad iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Problema 3.3.6 Sea C_0 un círculo de radio r.

I) Obtén un rectángulo Q_0, inscrito en C_0, de área máxima.

II) Sea ahora C_1 el círculo máximo interior a ese rectángulo, concéntrico con C_0, e inscribe un rectángulo Q_1 de área máxima en C_1. Calcula la suma de las áreas de la sucesión $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ de círculos obtenidos iterando el proceso.

Problema 3.3.7 Dada la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n!}$, calcula los valores de $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

Problema 3.3.8 Halla una función $f(x)$, desarrollable en serie de potencias, que verifique

$$f'(x) = f(x) + x, \qquad f(0) = 2.$$