Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Primer Curso del Grado en Ingeniería en
Sistemas de Comunicación, Sistemas Audiovisuales y Telemática

NOTA

Cálculo I. Primer control, 3 de noviembre de 2008

Apellidos .... Nombre ....
D.N.I. .... Grupo ....

Tiempo: 80 min.

---

1. (Problema 1.1.9) Halla el conjunto H de $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

$$H = \{\, |x^2 - 2x| < 1 \,\}.$$

[2 p.]

---

2. (Problema 1.3.6) Calcula el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-6} \right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}.$$

[3 p.]

---

3. (Problema 2.3.3) Representa gráficamente en $\mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x} - 1}.$$

Muestra el dominio, asíntotas, extremos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
¿Tiene esta función máximo y mínimo absoluto?
¿Es una función inyectiva? ¿y sobreyectiva?

[5 p.]

Respuestas:

1. $$-1 < x^2 - 2x < 1 \Rightarrow \;\; H = (1-\sqrt{2}, 1) \cup (1, 1+\sqrt{2})$$

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{13}{2x-6}\right)^{\frac{2x-6}{13}\cdot\frac{13}{2x-6}\sqrt{4x^2+x-3}} =$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{13\sqrt{4x^2+x-3}}{2x-6}\right) = e^{-13}.$$

3.
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - 0$.
  No hay intersección con los ejes.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty,\;\; \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ asíntota vertical en $x = 0 \Rightarrow$
  no hay ni máximo ni mínimo global.
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\;\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asíntota horizontal en $x \to -\infty$

- $f'(x) = \dfrac{e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^x-1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln 2.$
  Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (0, \ln 2)$, puntos con $f'(x) < 0$.
  Intervalo de crecimiento: $(\ln 2, \infty)$, puntos con $f'(x) > 0$.
  Por lo tanto, $f(\ln 2) = 4$ es un mínimo local.

- $f''(x) = \dfrac{e^{4x} - 3e^{3x} + 4e^{2x}}{(e^x-1)^3}$
  Intervalo de convexidad: $(0, \infty)$ puntos con $f''(x) > 0$.
  Intervalo de concavidad: $(-\infty, 0)$ puntos con $f''(x) < 0$.

- La función no es sobreyectiva ya que $f(x) \neq 0$ y no es inyectiva debido a que hay puntos con la misma imagen.