# Universidad Carlos III de Madrid

**Escuela Politécnica Superior**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Primer Curso del Grado en Ingeniería en
Sistemas de Comunicación, Sistemas Audiovisuales y Telemática

**Cálculo I.** Segundo control, 25 de noviembre de 2008

NOTA

Apellidos ............................................................ Nombre ..............................
D.N.I. ............................................................ Grupo ..............................

**Tiempo: 80 min.**

**1. (Problema de clase)** Aproxima $e$ utilizando un polinomio de Taylor, con un error menor que 0.001. ¿Cuántos términos del polinomio son necesarios?

[2 p.]

**2. (Problema 3.1.4)** Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}$$

[2 p.]

**3. (Problemas 3.2.1, 3.2.4)** Estudia la convergencia de las siguientes series

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^2$

Ayuda: $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$.

[4 p.]

**4. (Problema 3.3.4)** Calcula la serie de Taylor, el radio y el intervalo de convergencia de

$$f(x) = \frac{1}{2 - x^2}$$

Ayuda: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \cdots$ .

[2 p.]

**Respuestas:**

**1.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + E, \quad E(x) = \dfrac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad z \in (0,x),$

$E(1) = \dfrac{e^z}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} < 0.001 \Rightarrow 3000 < (n+1)! \Rightarrow n = 6$

$e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} = 2.718.$

---

**2.** $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} \underset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log(1+1/n)} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\log(1+1/x)} \underset{Taylor}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

---

**3.**

1. Por el criterio de comparación en el límite: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log(1+1/n)^n = \log e = 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

2. As $(\arctan 1/n)^2 = \left(\dfrac{1}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, por el criterio de comparación en el límite, la serie es absolutamente convergente:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\arctan n)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} = 1.$$

---

**4.** $f(x) = \dfrac{1}{2-x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-x^2/2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n},$

por lo tanto $a_n = \dfrac{1}{2^{n/2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n/2}}} = 1/\sqrt{2}$ por lo que el radio de convergencia es $\rho = \sqrt{2}$.

Para estudiar el intervalo de convergencia, analizamos los extremos, como $f(\pm\sqrt{2}) = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ es divergente, concluimos que el intervalo de convergencia es $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

---