

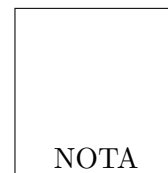
Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Primer Curso del Grado en Ingeniería en

Sistemas de Comunicación, Sistemas Audiovisuales y Telemática



Cálculo I. Segundo control, 25 de noviembre de 2008

NOTA

Apellidos..... Nombre.....

D.N.I..... Grupo.....

Tiempo: 80 min.

1. (Problema de clase) Aproxima e utilizando un polinomio de Taylor, con un error menor que 0.001. ¿Cuántos términos del polinomio son necesarios?

[2 p.]

2. (Problema 3.1.4) Calcula el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n}$$

[2 p.]

3. (Problemas 3.2.1, 3.2.4) Estudia la convergencia de las siguientes series

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^2$

Ayuda: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$. [4 p.]

4. (Problema 3.3.4) Calcula la serie de Taylor, el radio y el intervalo de convergencia de

$$f(x) = \frac{1}{2-x^2}$$

Ayuda: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \dots$

[2 p.]

Respuestas:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E$, $E(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$, $z \in (0, x)$,

$$E(1) = \frac{e^z}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0.001 \Rightarrow 3000 < (n+1)! \Rightarrow n = 6$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2.718.$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n} \stackrel{Stolz}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log(1+1/n)} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\log(1+1/x)} \stackrel{Taylor}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

3.

1. Por el criterio de comparación en el límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1+1/n)^n = \log e = 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

2. As $(\arctan 1/n)^2 = \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, por el criterio de comparación en el límite, la serie es absolutamente convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\arctan n)^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} = 1.$$

4. $f(x) = \frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$,

por lo tanto $a_n = \frac{1}{2^{n/2}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n/2}}} = 1/\sqrt{2}$ por lo que el radio de convergencia es $\rho = \sqrt{2}$.

Para estudiar el intervalo de convergencia, analizamos los extremos, como $f(\pm\sqrt{2}) = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ es divergente, concluimos que el intervalo de convergencia es $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
