



Cálculo I. Tercer control, 17 de diciembre de 2008

Apellidos..... Nombre.....
D.N.I..... Grupo.....

Tiempo: 80 min.

1. Halla las siguientes primitivas

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 2} dx, \quad \int \cos^3 x \sin^2 x dx \quad \int x(\log x)^2 dx$$

[4.5 p.]

2. Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x}{x^3}.$$

[1.5 p.]

3. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$, su asíntota en $x \rightarrow +\infty$ y el eje vertical.

[2 p.]

4. Calcula el volumen generado al rotar

$$0 \leq y \leq 1 + \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

alrededor del eje x .

[2 p.]

Respuestas:

1.

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{2}{(x-1)^2 + 1} dx = 2 \arctan(x-1) + C.$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \sin^2 x dx = \int \cos x \sin^2 x dx - \int \cos x \sin^4 x dx = \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \end{aligned}$$

En la última, hay que hacer dos veces IPP, primero con $u = (\log x)^2$ y después con $u = \log x$,

$$\begin{aligned} \int x(\log x)^2 dx &= \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int 2 \frac{\log x}{x} \frac{x^2}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x}{x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{6x} = \frac{1}{3}.$$

3.

$$A = \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = -\log(1 + e^{-x}) \Big|_0^\infty = \log 2.$$

4.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} (1 + \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin x + \sin^2 x) dx = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = 3\pi^2 + 0 + 0 = 3\pi^2. \end{aligned}$$
