Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

Primer Curso. Grado en Ingeniería en
Sistemas de Comunicación, Sistemas Audiovisuales y Telemática

CÁLCULO I   Examen final, 22 de enero de 2009.

Tiempo: 3.30 horas

Problema 1 (3 p.) Considera la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ -x^2 + 1 & x \in [-1, 1] \end{cases}$$

a) Analiza su continuidad y diferenciabilidad.

b) Halla sus máximos y mínimos locales y absolutos.

c) Dibuja su gráfica.

Problema 2 (1 p.) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos verificando $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

Problema 3 (2 p.)

a) Estudia la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}\sqrt{n}}{(n!)^2}.$$

b) Suma la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{e^n} - \frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}} \right).$$

Problema 4 (2 p.) Sea $f(x)$ la función definida como

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t)}{t}\, dt$$

a) Halla la serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 0$ utilizando la serie de Taylor de $\log(1+t)$.

b) Halla la serie de Taylor de $f'(x)$ alrededor de $x = 0$. Analiza si $x = 0$ es un máximo o mínimo local de $f(x)$.

Problema 5 (2 p.) Calcula las siguientes primitivas

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^2}, \qquad \int_1^{e^2} \log(\sqrt{x})\, dx.$$

Problema 1

a) Continuidad: como $\ln(x^2)$ y $-x^2+1$ son continuas en sus respectivos dominios, únicamente tenemos que estudiar la continuidad en $\{-1,1\}$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 0$$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2/x & x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ -2x & x\in(-1,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -2$$

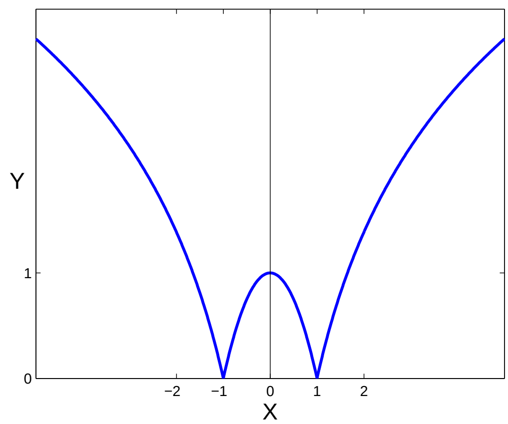
Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

b) Los puntos críticos de f son los puntos del dominio donde la función no es derivable, es decir, $\{-1,1\}$, y los puntos cuya derivada es nula, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$. Así que tenemos que estudiar los puntos $\{-1,0,1\}$. Con el criterio de la primera derivada, obtenemos que

x	$f'(x)$	
-1	$- \to +$	mínimo local
0	$+ \to -$	máximo local
1	$- \to +$	mínimo local

Como $f(-1)=f(1)=0$ y $f(x)\geq 0$, estos puntos son mínimos absolutos. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ no hay máximo absoluto.

c) La gráfica de f es



Problema 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \underset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = L^2.$$

Problema 3

a) Por el criterio del cociente, converge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\big((n+1)!\big)^2} \frac{(n!)^2}{e^{2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{(n+1)^2} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 0 < 1.$$

b) Es una serie telescópica, por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{e^n} - \frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}} \right) = \frac{1}{e} - \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} = \frac{1}{e}.$$

Problema 4

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t)}{t} dt = \int_0^{x^2} \frac{t - t^2/2 + \cdots + (-1)^{n+1} t^n/n + \cdots}{t} \, dt = \\ &= \int_0^{x^2} (1 - t/2 + \cdots + (-1)^{n+1} t^{n-1}/n + \cdots) \, dt = \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2\cdot 2} + \frac{t^3}{3\cdot 3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n^2} + \cdots \right]_0^{x^2} = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{9} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n^2}. \end{aligned}$$

b)

$$f'(x) = 2x - x^3 + \frac{6}{9} x^5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} x^{2n-1}.$$

$f(0)$ es un mínimo local.

Problema 5 En la primera integral debemos hacer descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \to \ A = C = 0, \ B = 1/2, \ D = -1/2 \to$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x^2+2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

En la segunda integral hacemos primero el cambio de variables, $\sqrt{x} = t$, y después integramos por partes con $u = \log t$ y $dv = 2t dt$, por lo que la integral es

$$\int_1^{e^2} \log \sqrt{x} \, dx = \int_1^e \log t \cdot 2t \, dt = \log t \cdot t^2 \Big|_1^e - \int_1^e t \, dt = e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}.$$
