Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemáticas

Primer Curso. Grado en Ingeniería en
Sistemas de Comunicación, Sistemas Audiovisuales y Telemática

$\boxed{\text{CÁLCULO I}}$ Examen final, 24 de junio de 2009.

Tiempo: 3.30 horas

Problema 1 (2 p.)

a) Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, estudiando dominio, continuidad y derivabilidad, crecimiento, concavidad y convexidad, extremos y asíntotas.

b) La misma cuestión para la función $g(x) = \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$.

Problema 2 (2 p.) Sea la sucesión definida de forma recurrente

$$b_0 = 10\,, \qquad b_{n+1} = 2 + \frac{b_n}{3}\,,\ n \geq 0.$$

a) Demuestra que es monótona y acotada.

b) Calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Problema 3 (2 p.) Sea la función $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$.

a) Utilizando la serie de Taylor de la función $h(t) = \cos t$, obtén la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de $g(x)$.

b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^4}$.

Problema 4 (2 p.)

a) Estudia la convergencia de las series siguientes:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^4}{n!}\,, \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}\,.$$

b) Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{2^{2n} n!}$.

Problema 5 (2 p.)

a) Calcula la primitiva $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

b) Calcula el volumen de revolución obtenido al girar el conjunto

$$\{0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\}$$

alrededor del eje horizontal.

Problema 1

a) El radicando es negativo en $(1, 3)$, por lo que el dominio es $\mathbb{R} \setminus (1, 3)$. Como es la raíz de un polinomio, es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus [1, 3]$.
Veamos las asíntotas:

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2-4x+3} = 0, \qquad \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-4x+3} = 0,$$

por tanto no hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2-4x+3} = \infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-4x+3} = \infty,$$

no hay asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2-4x+3} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = -2,$$

por lo tanto, $y = x - 2$ es una asíntota oblicua para $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2-4x+3} + x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = 2,$$

por lo tanto, $y = -x + 2$ es una asíntota oblicua para $x \to -\infty$.
Si estudiamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Como $x = 2$ no está en el dominio, no hay puntos críticos que verifiquen $f'(x) = 0$. $x = 1$ y $x = 3$ son puntos críticos con tangente vertical.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \infty,$$

Como $f' > 0$ en $(3, \infty)$, f es creciente en $(3, \infty)$. Como $f' < 0$ en $(-\infty, 1)$, f es decreciente en $(-\infty, 1)$. Los puntos $f(1) = f(3) = 0$, son mínimos absolutos, ya que $f(x) \geq 0$.
Aunque no se pide el estudio de la concavidad, si hallamos la segunda derivada

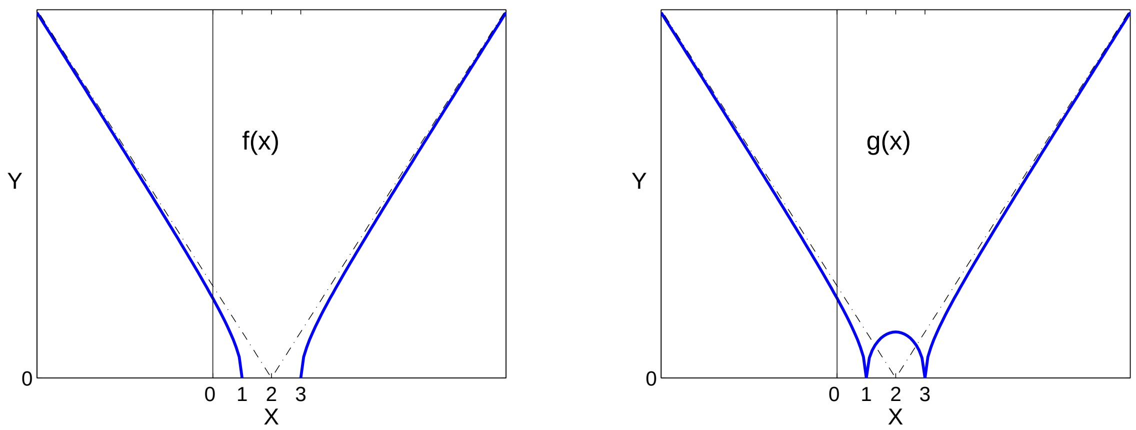
$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2-4x+3)^{3/2}},$$

Siempre es negativa, por lo que f es cóncava.

b) g es idéntica a f en el dominio de f, pero ahora el dominio de g es $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin (1,3) \\ \sqrt{-x^2+4x-3}, & x \in (1,3). \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \notin [1,3] \\ \dfrac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}, & x \in (1,3). \end{cases}$$

$x = 2$ es un punto crítico y un máximo local ya que g' es positiva en $(1, 2)$ y negativa en $(2, 3)$.
Los puntos $x = 1$ y $x = 3$ siguen siendo los mínimos absolutos.
g'' es negativa en $(1, 3)$, así que g es cóncava en $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$.



Problema 2

a) La sucesión es monótona decreciente, $b_1 = 2 + \frac{10}{3} < 2 + 4 = 6 < 10 = b_0$ y, por inducción, si $b_n < b_{n-1}$, tenemos que:

$$b_{n+1} = 2 + \frac{b_n}{3} < 2 + \frac{b_{n-1}}{3} = b_n.$$

Como $b_0 > 0$, todos los b_n son positivos, ya que se construyen añadiendo números positivos, por lo que la sucesión está acotada inferiormente. Concluimos que la sucesión es, por tanto, convergente.

b) Por el apartado anterior, el límite existe, por lo que debe verificar

$$l = 2 + \frac{l}{3} \qquad \Rightarrow \qquad l = 3.$$

Problema 3

a) Utilizando la serie del coseno, convergente en $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\cos(t) - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{x^2} \frac{\cos(t) - 1}{t}\, dt = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n(2n)!} \right]_0^{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2n(2n)!}.$$

b) Podemos hallar el límite con la serie anterior:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^4} = -\frac{1}{4}.$$

O aplicando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x^2) - 1) 2x}{x^2 \cdot 4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{2x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x^2)}{4x^2} = -\frac{1}{4}.$$

Problema 4

a) i) Por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^4 n!}{(n+2)^4(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^4 = 0,$$

por lo que la serie es convergente.

ii) Como es una serie alternada podemos utilizar el criterio de Leibniz. El término general es decreciente y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0,$$

por lo que la serie converge, pero no es absolutamente convergente, ya que $\dfrac{1}{\log n} > \dfrac{1}{n}$ y la serie armónica diverge.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{2^{2n} n!} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n \frac{1}{n!} = 3\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n \frac{1}{n!} - 1\right] = 3(e^{-3/4} - 1).$$

Problema 5

a) Integrando por partes:

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

donde $u = \arctan x$, $du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$, $dv = dx$, $v = x$.

b) Utilizando la fórmula del volumen y haciendo descomposición en fracciones simples, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(-1 + \frac{5/2}{5-x} + \frac{5/2}{5+x}\right) dx \\ &= \pi \left[-x + \frac{5}{2}\log\left|\frac{5+x}{5-x}\right|\right]_0^3 = \pi\left(-3 + \frac{5}{2}\log 4\right) = \pi\left(-3 + 5\log 2\right). \end{aligned}$$