CONTENIDO

- **Sistemas de coordenadas**
- **Ecuación de la trayectoria**
- **Vectores posición, velocidad y aceleración**
- **Componentes intrínsecas de la aceleración**
- **Movimiento circular**
- **Sistemas de referencia**
- **Movimiento relativo: transformaciones de Galileo**

BIBLIOGRAFÍA

- SUSAN M. LEA, J.R. BURKE. La naturaleza de las cosas

  Cap. 2 y 3.1-3.2 (excepto rotación de un cuerpo rígido)

- SEARS, ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN. FÍSICA UNIVERSITARIA Pearson-Addison Wesley, 1998

  Cap. 2 y 3

- TIPLER, PA. FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA Ed Reverté 2005

  Cap. 2 y 3

- MARCELO ALONSO Y EDWARD J. FINN “Física”, Volumen I. 1ª edición

  Cap. 6. Movimiento relativo: 6.1-6.5

- MARCELO ALONSO “FÍSICA”, 1ª Edición

  Cap. 3. Movimiento rectilíneo: 3.9

  Cap. 4. Movimiento curvilíneo: 4.6

  Cap. 5. Movimiento circular: 5.5 y 5.6

- DOUGLAS C. GIANCOLI, “FÍSICA PARA UNIVERSITARIOS”, Volumen I, 3ª edición.

  Cap. 3.Cinemática en dos dimensiones; vectores: 3.10

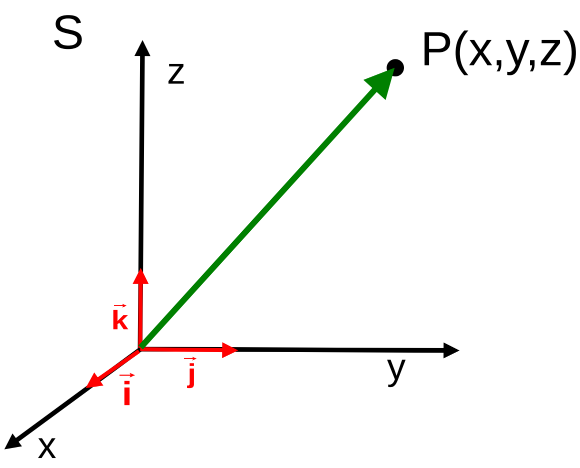
  Cap. 11.Rotación general: 11.9 y 11.10

SISTEMA DE COORDENADAS

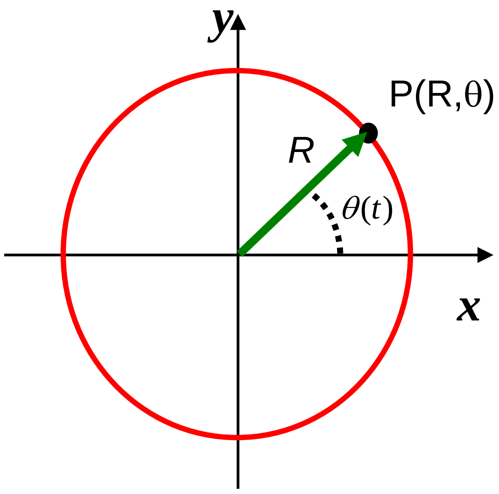
Describir el movimiento de una partícula consiste en indicar su posición en función del tiempo.

El primer paso es expresar la posición de una manera inequívoca utilizando un sistema de coordenadas concreto, y especificando la posición del origen de coordenadas. Un sistema de coordenadas es el conjunto de parámetros necesarios para expresar la posición de cualquier objeto en el espacio.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS



SISTEMA DE COORDENADAS POLARES



$$x(t) = R\cos(\theta(t))$$

$$y(t) = R\sin(\theta(t))$$

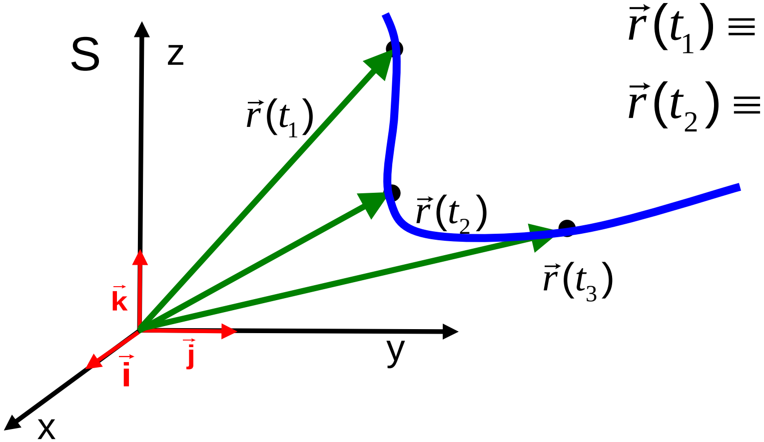
$$z(t) = z_0$$

VECTOR DE POSICIÓN, TRAYECTORIA

Lugar del espacio donde se encuentra un objeto. Se designa por $\vec{r}$. En coordenadas cartesianas se describe a partir del valor de sus 3 coordenadas: x, y, z

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$



$$\vec{r}(t_1) \equiv \vec{r}_1$$

$$\vec{r}(t_2) \equiv \vec{r}_2$$

Trayectoria:

lugar geométrico de los puntos del espacio por donde pasa la partícula en movimiento. Se describe por medio de las ecuaciones paramétricas: x(t), y(t) y z(t), o relacionando x, y, z entre sí eliminando la variable t

Ejemplo: Una partícula se mueve tal que su vector de posición es: $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + 6t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$

Su trayectoria se puede expresar como:

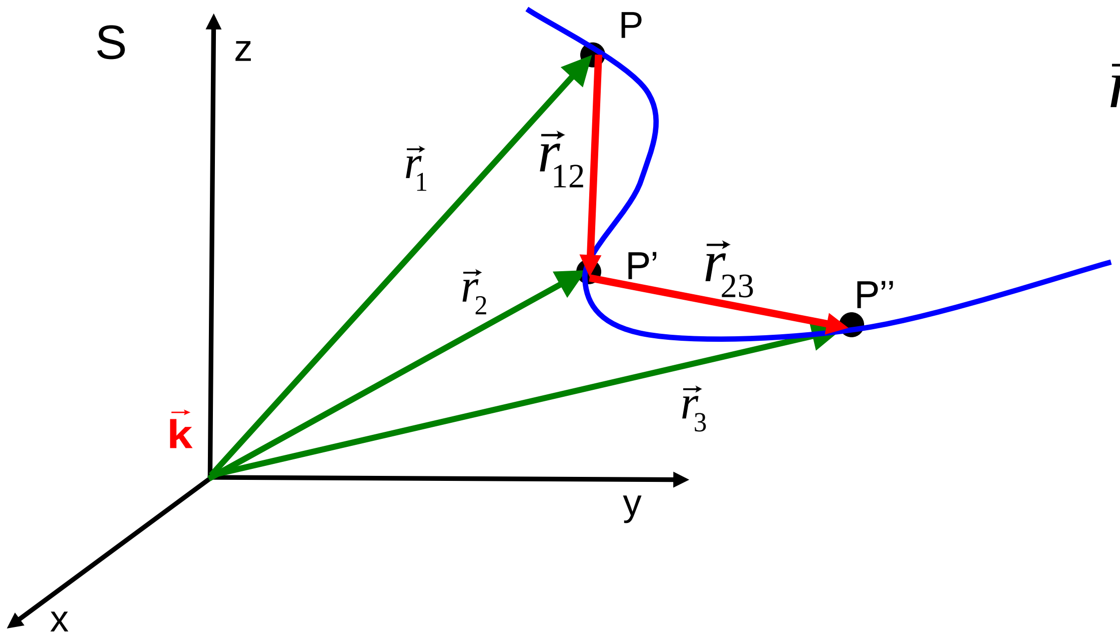
$$x(t) = 2t \qquad y(t) = 6t \qquad z(t) = t^2$$

o

$$y = 3x \qquad z(t) = \frac{x^2}{4}$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO

Indica la variación de la posición de una partícula cuando se desplaza de un punto a otro.



$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

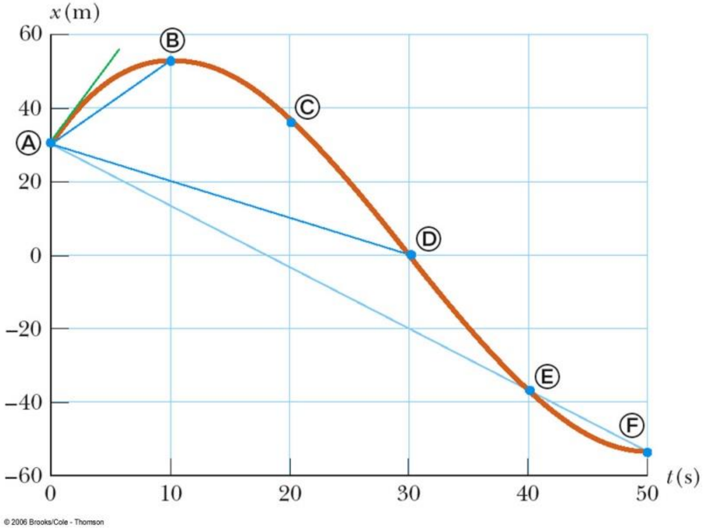
En general es distinto que la distancia recorrida ΔS, que se mide sobre la trayectoria

VECTOR VELOCIDAD MEDIA

Si un punto se desplaza desde la posición inicial $\vec{r}_1$, en el tiempo t_1, a la posición final $\vec{r}_2$, en el tiempo t_2, el vector velocidad media entre esos dos puntos se define como:

$$\vec{v}_M = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \frac{m}{s}$$

Cuando se habla de velocidad media (sin nombrar la palabra vector), se refiere al cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido



La velocidad media entre dos puntos (por ejemplo en el dibujo entre los puntos A y C), es la pendiente de la recta que une esos dos puntos

VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Corresponde al vector velocidad media cuando el intervalo entre los puntos es infinitésimo, e indica la velocidad en cada instante de tiempo.

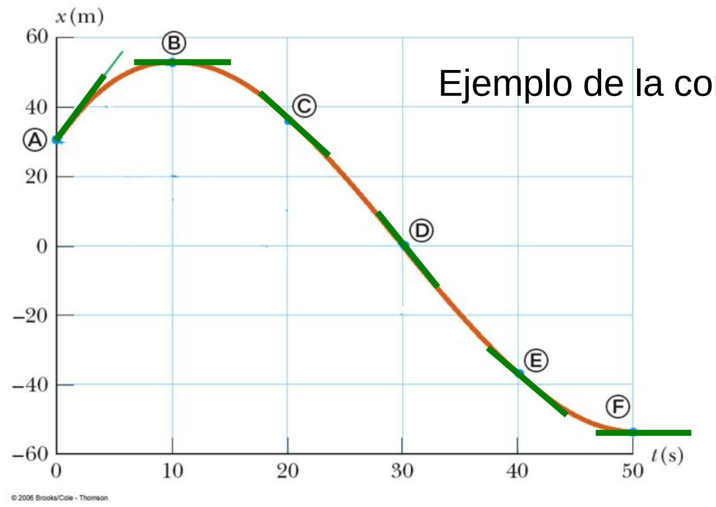
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Como: $\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

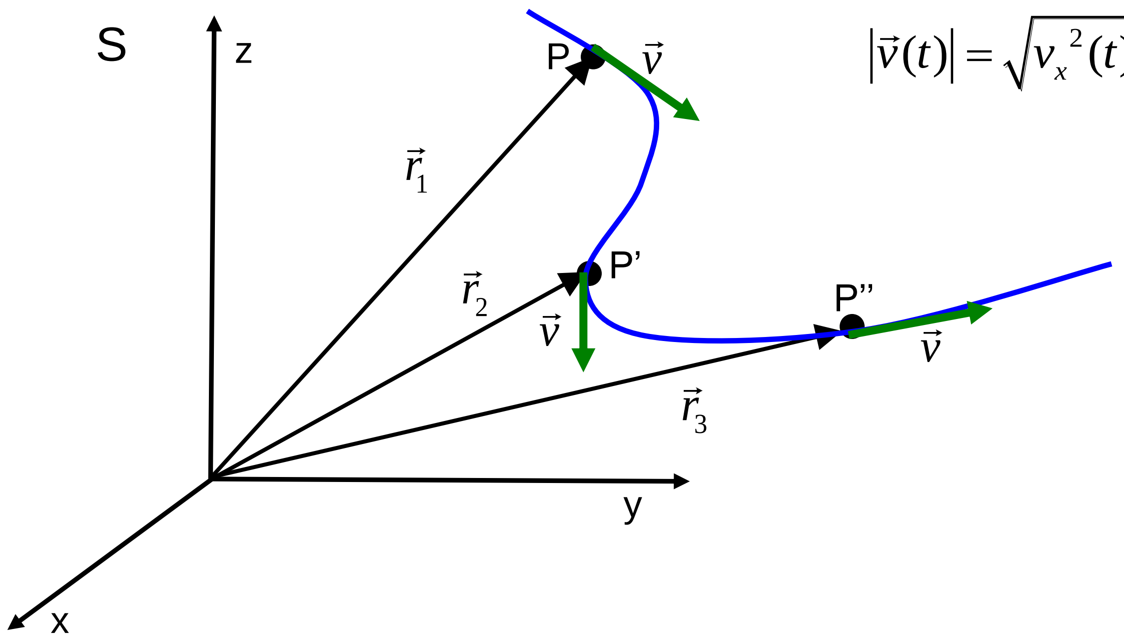
Gráficamente, corresponde a la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva

Ejemplo de la componente x



VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Generalizando a 3 dimensiones:



$$\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^{\,2}(t) + v_y^{\,2}(t) + v_z^{\,2}(t)}$$

El vector velocidad instantánea tiene SIEMPRE la dirección tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento

VECTOR ACELERACIÓN

Magnitud que da información del cambio del VECTOR VELOCIDAD. Nos informa tanto del cambio del módulo del vector velocidad, como del cambio de dirección del vector velocidad

VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

$$\vec{a}_M = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \frac{m}{s^2}$$

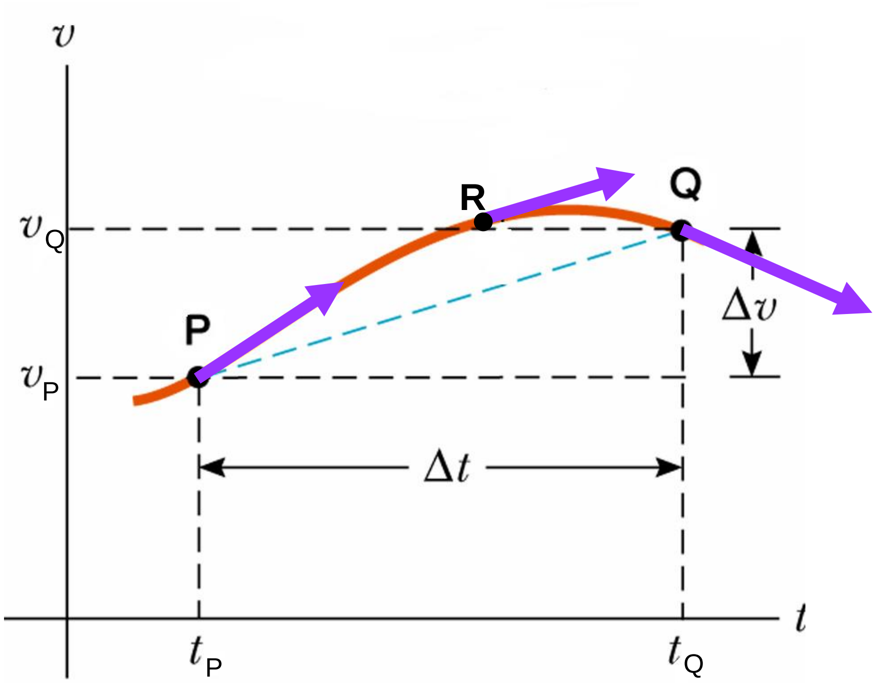
VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} = a_x(t)\ \vec{i} + a_y(t)\ \vec{j} + a_z(t)\ \vec{k}$$

$$\left|\vec{a}(t)\right| = \sqrt{a_x^{\,2}(t) + a_y^{\,2}(t) + a_z^{\,2}(t)}$$

VECTOR ACELERACIÓN



$$\vec{a}_M\,(\text{entre P y Q}) = \frac{\vec{v}_Q - \vec{v}_P}{t_Q - t_P} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \frac{m}{s^2}$$

La dirección de $\vec{a}(t)$ es tangente en cada punto a la curva que representa $\vec{v}$ frente a t

Esa dirección es, en general, distinta de la tangente a la trayectoria. Solo es igual cuando el movimiento es rectilíneo.

COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

Si ahora calculamos **a** teniendo en cuenta que $\vec{v}(t)=|v|\vec{u}_{\tan}$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(|v|\vec{u}_{\tan}\right)=\frac{d|v|}{dt}\vec{u}_{\tan}+|v|\frac{d\vec{u}_{\tan}}{dt}=\boxed{\vec{a}_{tg}(t)+\vec{a}_N(t)}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

$$\vec{a}_{tg}(t)=\frac{d|v|}{dt}\vec{u}_{\tan}$$

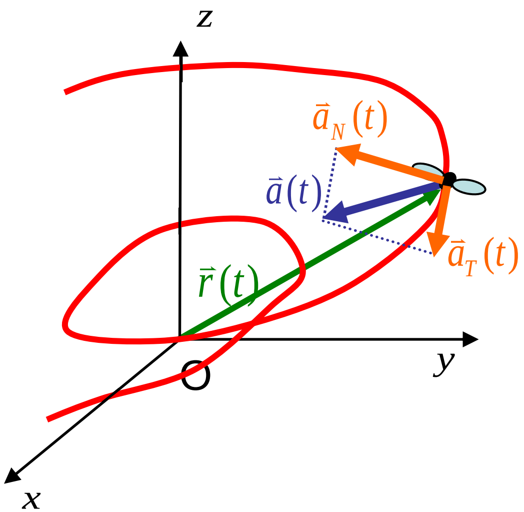
a_{tg} (aceleración tangencial) mide el cambio en el módulo de **v**. Tiene dirección tangente a la trayectoria y sentido el de la variación de **v**

$$\vec{a}_N(t)=|v|\frac{d\vec{u}_{\tan}}{dt}; \quad |\vec{a}_N|=\frac{|v|^2}{\rho}$$

donde ρ= radio de curvatura instantáneo

a_N (aceleración normal) mide el cambio en la dirección de **v**. Tiene dirección perpendicular a la tangente a la trayectoria, y sentido hacia el interior de la curva

$$|\vec{a}(t)|=\sqrt{a_{tg}^{\,2}(t)+a_N^{\,2}(t)}$$



TRANSFORMACIONES INVERSAS

Determinación de la velocidad y la posición de una partícula a partir de su aceleración.

Si recordamos: $\dfrac{df(x)}{dx} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \int g(x)dx$

Sea: $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt = \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt\,\vec{i} + \int_{t_0}^{t} a_y(t)dt\,\vec{j} + \int_{t_0}^{t} a_z(t)dt\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} \left|\vec{a}_{tg}(t)\right| dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt\,\vec{i} + \int_{t_0}^{t} v_y(t)dt\,\vec{j} + \int_{t_0}^{t} v_z(t)dt\,\vec{k}$$

Distancia recorrida $\Delta S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left|\vec{v}(t)\right| dt$

TIPOS DE MOVIMIENTO

Se clasifican en diversos tipos dependiendo de los módulos de las aceleraciones tangenciales y normales.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_N(t) + \vec{a}_{tg}(t)$$

$$|\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_n(t)|^2 + |\vec{a}_{tg}(t)|^2$$

$|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}$ indica cambio de dirección de la velocidad

$|\vec{a}_{tg}| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ indica cambio de módulo de la velocidad

$$|\vec{a}_n| = 0 \Rightarrow \rho = \infty$$

$\Downarrow$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Si $|\vec{a}_{tg}| = 0, \Rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t_0)| \Rightarrow$ Movimiento rectilíneo uniforme

Si $|\vec{a}_{tg}| \neq 0$:

Si $|\vec{a}_{tg}(t)| = a_0 \Rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t_0)| + \int_{t_0}^{t} a_0 dt = |\vec{v}(t_0)| + a_0 (t - t_0)$

$\Downarrow$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Si $|\vec{a}_{tg}(t)| = f(t) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t_0)| + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt$

$\Downarrow$

Movimiento rectilíneo variado

TIPOS DE MOVIMIENTO

$$\left|\vec{a}_n\right| \neq 0 \Rightarrow \rho \neq \infty$$

$$\Downarrow$$

MOVIMIENTO CURVILÍNEO

$Si\ \rho = cte = \rho_0$

Movimiento circular

- Si $\left|\vec{a}_{tg}\right| = 0, \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| \Rightarrow$ Mov. Circular uniforme
- Si $\left|\vec{a}_{tg}\right| \neq 0$
  - Si $\left|\vec{a}_{tg}(t)\right| = a_0 \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} a_0 dt = \left|\vec{v}(t_0)\right| + a_0\,(t - t_0)$
    $\Downarrow$
    Movimiento circular uniformemente acelerado
  - Si $\left|\vec{a}_{tg}(t)\right| = f(t) \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$
    $\Downarrow$
    Movimiento circular variado

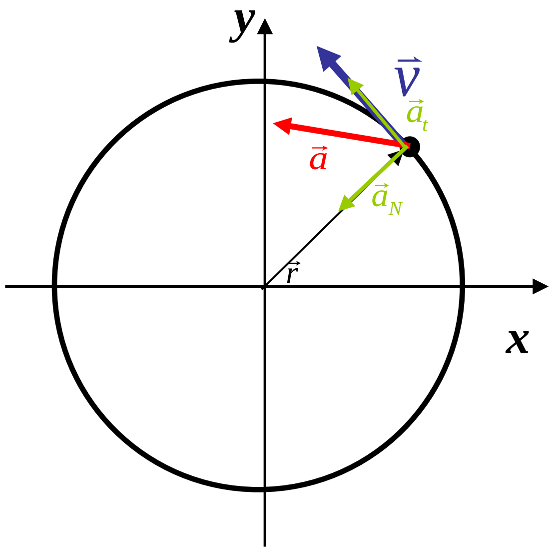
$Si\ \rho \neq cte = \rho(t)$

Movimiento curvilíneo

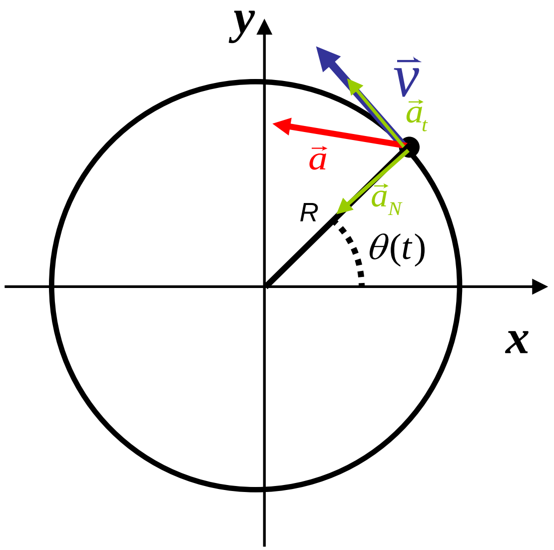
- Si $\left|\vec{a}_{tg}\right| = 0, \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| \Rightarrow$ Mov. Curvilíneo uniforme
- Si $\left|\vec{a}_{tg}\right| \neq 0$
  - Si $\left|\vec{a}_{tg}(t)\right| = a_0 \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} a_0 dt = \left|\vec{v}(t_0)\right| + a_0\,(t - t_0)$
    $\Downarrow$
    Movimiento curvilíneo uniformemente acelerado
  - Si $\left|\vec{a}_{tg}(t)\right| = f(t) \Rightarrow \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\vec{v}(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$
    $\Downarrow$
    Movimiento curvilíneo variado

MOVIMIENTO CIRCULAR

La trayectoria de la partícula es una circunferencia



Se describe fácilmente por medio de las coordenadas polares:



Como:

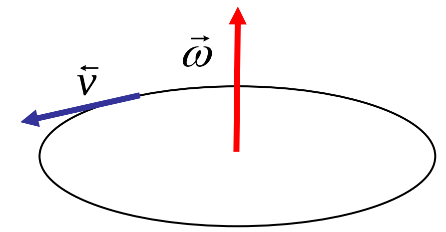
$$\vec{r}(t) = R\cos\left(\theta(t)\right)\vec{i} + R\sin\left(\theta(t)\right)\vec{j} + z_0\vec{k}$$

Podemos caracterizar el movimiento estudiando como cambia θ con el tiempo.

MOVIMIENTO CIRCULAR

Si llamamos:

VELOCIDAD ANGULAR $$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u} \qquad \frac{rad}{s}$$



Siendo **ω** un vector perpendicular al plano del movimiento y sentido dado por la regla de la mano derecha

y **ACELERACIÓN ANGULAR** $$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \qquad \frac{rad}{s^2}$$ De dirección la misma que **ω**

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\alpha}(t)dt$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES LINEALES Y ANGULARES

$$S(t) = R\,\theta(t)$$

$$\frac{dS}{dt} = |\vec{v}| = \frac{d}{dt}(R\,\theta) = R\cdot\omega$$

$$\frac{d\,|\vec{v}|}{dt} = |a_t| = R\cdot\alpha$$

Siendo la relación entre vectores:

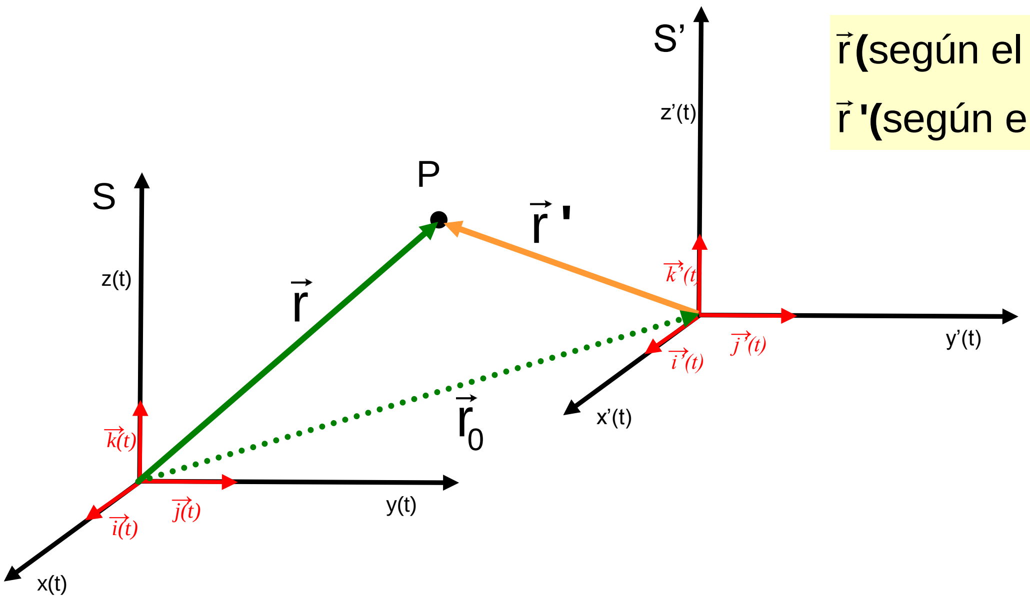
$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\alpha}\times\vec{r} = \underbrace{\boxed{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}}_{\vec{a}_N} + \underbrace{\boxed{\vec{\alpha}\times\vec{r}}}_{\vec{a}_t}$$

SISTEMA DE REFERENCIA

Consiste en definir el lugar (origen de coordenadas) desde el que se toman las medidas, y la dirección y sentido de los ejes de coordenadas.

El valor de una medida depende del sistema de referencia utilizado, y por tanto **es necesario detallar siempre qué sistema de referencia estamos utilizando.**



$\vec{r}$ **(**según el sistema de referencia S) $= -2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{r}\,'$ **(**según el sistema de referencia S') $= 3\vec{i}\,' - 3\vec{j}\,' + \vec{k}\,'$

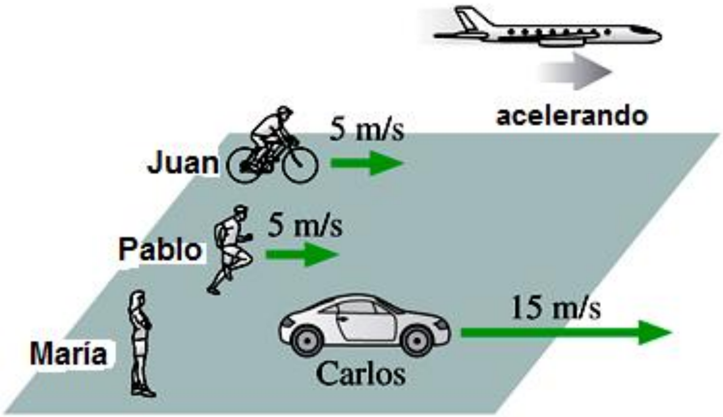
SISTEMA DE REFERENCIA

Los vectores de velocidad y de aceleración de un objeto también dependen del sistema de referencia escogido.

ES IMPRESCINDIBLE

APRENDER A CALCULAR Y A RELACIONAR ESTAS MAGNITUDES EN DIFERENTES SISTEMAS DE REFERENCIA

Ejemplo



María, Juan y Carlos miden la velocidad de Pablo. Los valores de los vectores velocidad de color verde están medidos por María (es decir medidos en el sistema de referencia centrado en María).

Nos preguntamos: ¿ Se puede decir que hay un único valor de la velocidad del corredor?

La respuesta es que no, que la velocidad de Pablo depende del sistema de referencia del observador que la mide. Así:

Según el sistema de referencia centrado en María: v_{Pablo}= 5 m/s
Según el sistema de referencia centrado en Juan: v_{Pablo}= 0 m/s
Según el sistema de referencia centrado Carlos: v_{Pablo}= -10 m/s

¿Medirá cada uno de ellos la misma aceleración del avión?

SISTEMA DE REFERENCIA

TIPOS DE SISTEMAS DE REFERENCIA

Podemos clasificarlos como:

- **SISTEMAS INERCIALES**: Aquellos sistemas que o bien están fijos o se mueven respecto a otro fijo con vector velocidad constante. Ejemplo: un tren que se mueve a velocidad constante.

- **SISTEMAS NO INERCIALES**: Los que se mueven con aceleración respecto a un sistema fijo. Ejemplo: un tiovivo

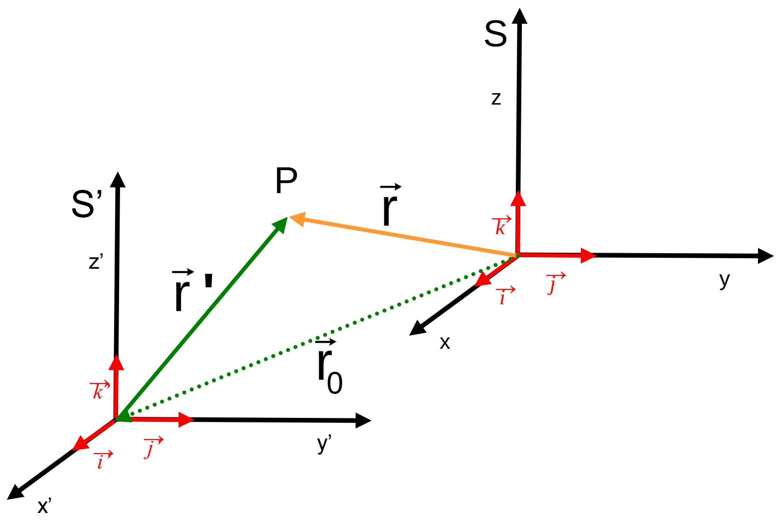
Estudiaremos como se transforman los valores de los vectores posición, velocidad y aceleración entre un sistema de referencia fijo, que designaremos como S, y un sistema de referencia general, que denotaremos como S'.

SISTEMA DE REFERENCIA. SISTEMAS INERCIALES

SISTEMAS INERCIALES

S' se mueve respecto a S en línea recta y con módulo de velocidad constante, con velocidad $\vec{v}_0$
Los vectores unitarios **i'**, **j'** y **k'** no cambian en el tiempo.

Si una partícula P se mueve, la relación entre las magnitudes medidas por ambos observadores se calcula por medio de:



$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_0(t)$$

$\vec{r}(t)$ lo mide el sistema de referencia S
$\vec{r}\,'(t)$ lo mide el sistema de referencia S'
$\vec{r}_0(t)$ lo mide el sistema de referencia S

$$x(t)\,\vec{i} = x'(t)\,\vec{i}\,' + x_0(t)\,\vec{i}$$
$$y(t)\,\vec{j} = y'(t)\,\vec{j}\,' + y_0(t)\,\vec{j}$$
$$z(t)\,\vec{k} = z'(t)\,\vec{k}\,' + z_0(t)\,\vec{k}$$

SIST. INERCIALES: TRANSFORMACIONES DE GALILEO

Si además los ejes de ambos sistemas son paralelos, las relaciones anteriores se simplifican mucho. Se las conoce por las transformaciones de Galileo.

$$\vec{i}\,' = \vec{i} \qquad \vec{j}\,' = \vec{j} \qquad \vec{k}\,' = \vec{k}$$

$$x(t)\,\vec{i} = \left[x'(t) + x_0(t)\right]\vec{i}$$
$$y(t)\,\vec{j} = \left[y'(t) + y_0(t)\right]\vec{j}$$
$$z(t)\,\vec{k} = \left[z'(t) + z_0(t)\right]\vec{k}$$

Si además, para t = t'=0, los sistemas coinciden. Entonces: $\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0 \cdot t$

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{v}_0 \cdot t \quad \text{o} \quad \vec{r}\,'(t) = \vec{r}\,(t) - \vec{v}_0 \cdot t$$

SIST. INERCIALES: TRANSFORMACIONES DE GALILEO

La relación entre las velocidades que miden ambos observadores se obtiene:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} = \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0$$

Y la relación entre las aceleraciones:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}_0(t)}{dt} = \vec{a}\,'(t)$$

IMPORTANTE: dos observadores moviéndose entre sí con movimiento uniforme, ven moverse a una partícula con la misma aceleración