CONTENIDO

- Campos escalares y vectoriales
- Gradiente y rotacional
- Campos conservativos. Potencial
- Trabajo realizado por una fuerza conservativa
- Fuerzas no conservativas: Fuerza de rozamiento
- Trabajo realizado por una fuerza no conservativa

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO-FINN, “FISICA”, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

Apéndice A: Vectores
- A.2 Escalares y vectores
- A.9 Gradiente de una función escalar
- A.10 Integral de línea de un vector: circulación

Aplicaciones de las leyes del movimiento:
- Fuerzas de fricción: 7.5
- Trabajo y energía: 9.7, 9.8, 9.9, 9.10 y 9.12

SEARS, ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN. FÍSICA UNIVERSITARIA Pearson-Addison Wesley, 1998

Fuerzas conservativas y no conservativas : 7-1 al 7-5
Fuerzas de Rozamiento: 5-4
Trabajo y Energía: 6-4

TIPLER, PA. FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA Ed Reverté 2005

Fuerzas de Rozamiento: 5.1, 5.2, 7.2
Trabajo y Energía, Fuerzas conservativas y no conservativas: Capítulo 6

SCHAUM, M. R. SPIEGEL, “ANALISIS VECTORIAL”, Ed. Mc Graw-Hill 1991.

Capítulos de Operadores Diferenciales e Integración

SNIDER, “ANALISIS VECTORIAL”, 6ª ed., Ed. Mc Graw-Hill 1992.

Pág. 109-116, 129-136, 138-143

CAMPOS escalares y vectoriales

Magnitud escalar: aquella definida simplemente por su módulo.
Ejemplo: temperatura, presión, energía, etc

Magnitud vectorial: aquella que para su definición necesita de además del módulo, su dirección y sentido
Ejemplo: fuerza, velocidad, momento de una fuerza, etc

CAMPO

Físicamente representa la distribución espacial de una magnitud

- Campo escalar
- Campo vectorial

Matemáticamente:
un campo escalar es una función escalar de las coordenadas y del tiempo, que determina el valor de una magnitud escalar en cada punto del espacio, para cada instante de tiempo

$$T = T(x,y,z,t)$$

Un campo vectorial es una función vectorial de las coordenadas y del tiempo, que determina el valor de una magnitud vectorial en cada punto del espacio, para cada instante de tiempo

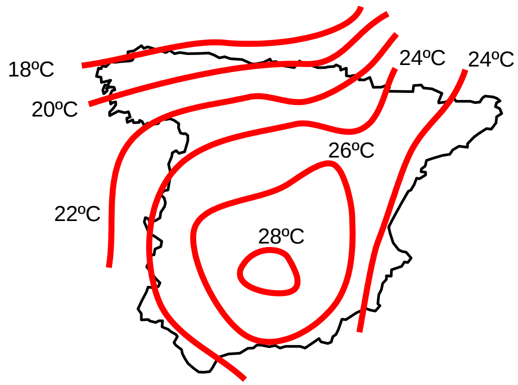
$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$$

$$v_x = v_x(x,y,z,t) \quad v_y = v_y(x,y,z,t) \quad v_z = v_z(x,y,z,t)$$

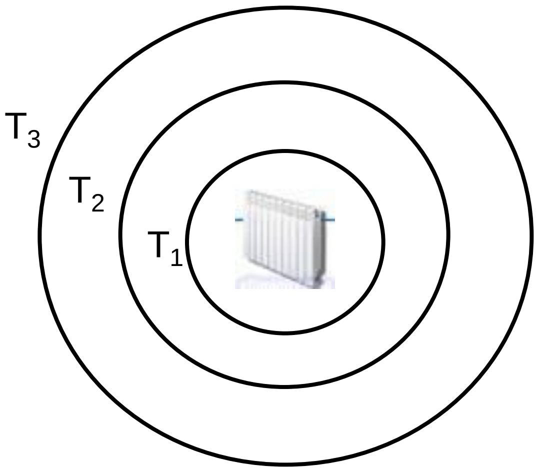
CAMPOS ESCALARES: representación

Se representan mediante el valor de la función o mediante las SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES: lugar geométrico de los puntos que cumplen que la función es constante. Se construyen uniendo los puntos en donde la función tiene el mismo valor.



Ejemplo: isotermas

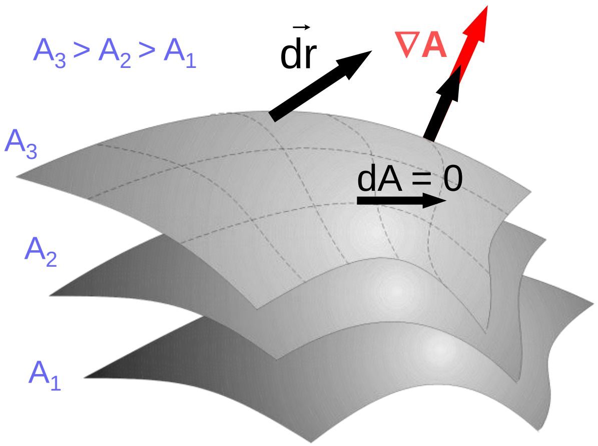


$T_1 > T_2 > T_3$

GRADIENTE

Si en el punto P(x,y,z) la función A vale A(x,y,z), en el punto P'(x+dx, y+dy, z+dz) ¿Cuánto vale la función A?

Al pasar de P a P', la función A experimenta una variación dA que viene dada por: $$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz$$

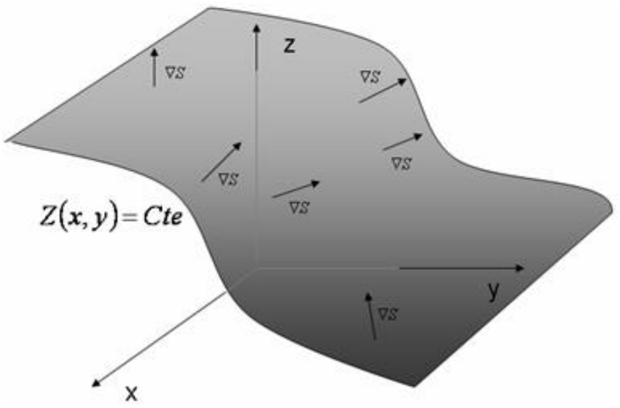


Se define Gradiente de la función escalar A

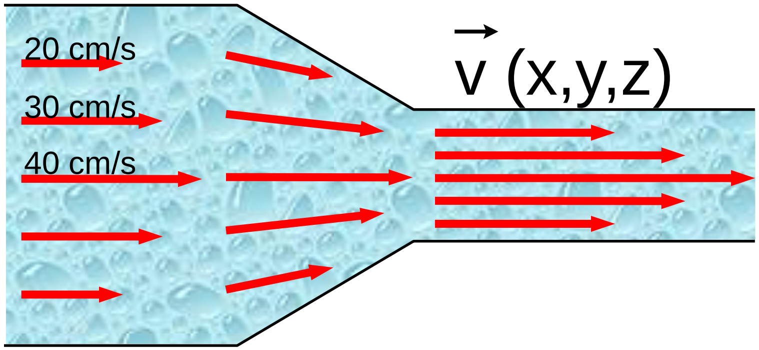
$$\vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

Por tanto podemos escribir: $dA = \vec{\nabla} A \cdot d\vec{r}$

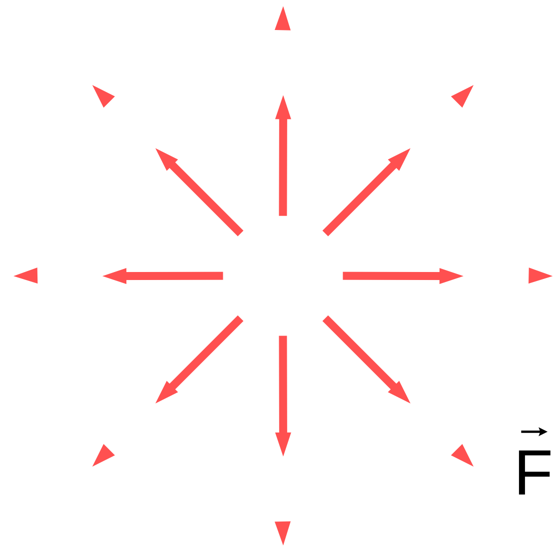
El gradiente es un vector que tiene la dirección en la que la variación de la función es máxima, y su sentido es hacia los valores crecientes.
Es perpendicular en cada punto a la superficie de nivel en dicho punto



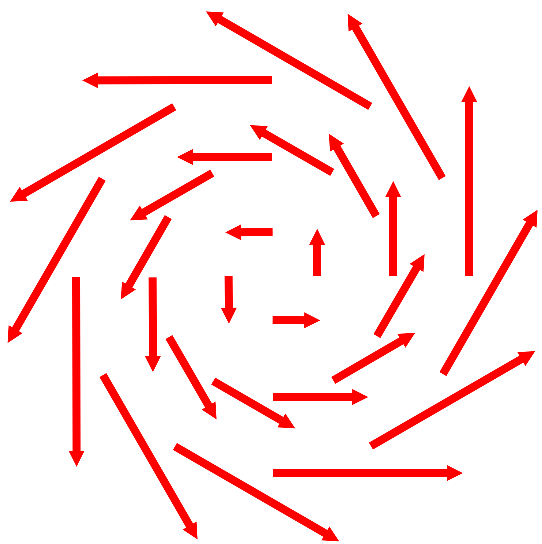
CAMPOS VECTORIALES



$\vec{v}\,(x,y,z)$



$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$$

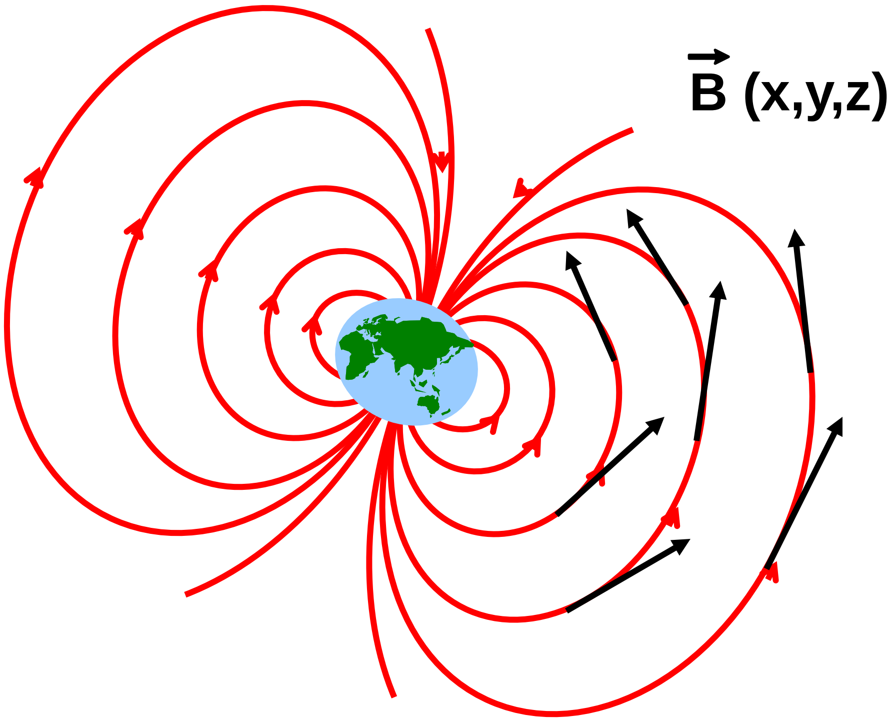


$$\vec{F} = -ky\vec{i} + kx\vec{j}$$

CAMPOS VECTORIALES: representación

Se representan mediante las LÍNEAS DE CAMPO.

LÍNEAS DE CAMPO: Aquellas curvas cuya tangente en cada punto es paralela al campo en dicho punto.



ROTACIONAL

El rotacional del campo vectorial **S** se calcula: $\vec{\nabla} \times \vec{S} = \vec{C}$

$$\text{rot } \vec{S} = \vec{\nabla} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix}$$

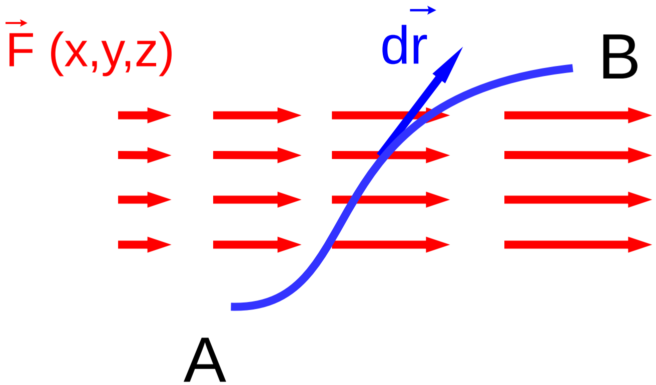
SIGNIFICADO: Para visualizarlo imaginemos que S representa el flujo de un fluido, y que tenemos un sólido inmerso en ese fluido. Por efecto del movimiento del fluido, el sólido está girando. El valor del rotacional de S en un punto es proporcional al vector velocidad angular del sólido en ese punto.

- Si $\vec{\nabla} \times \vec{S} = 0$ en un punto significa que el fluido no produce rotaciones en ese punto, es decir no forma remolinos. Si colocamos una rueda con aspas rígidas en el fluido, el fluido la trasladará con él, pero no lo hará girar alrededor de su eje.
- Si $\vec{\nabla} \times \vec{S} = 0$ en todos los puntos del espacio, el campo se llama irrotacional.

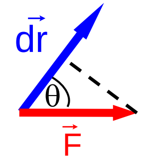
SE CUMPLE QUE EL ROTACIONAL DEL GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR ES CERO

CIRCULACIÓN

Sea un campo vectorial **F**, y L una trayectoria cualquiera. Si **dr** es un elemento de línea de la trayectoria L, entonces la circulación C de **F** a lo largo de la trayectoria entre los puntos A y B es:



$$|dC| = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$



es decir $dC = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$

$$C_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \vec{\mathbf{i}} + F_y \vec{\mathbf{j}} + F_z \vec{\mathbf{k}} \qquad d\vec{\mathbf{r}} = dx\vec{\mathbf{i}} + dy\vec{\mathbf{j}} + dz\vec{\mathbf{k}}$$

$$C_A^B = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Si F es una fuerza, la circulación entre A y B tiene el significado del trabajo W realizado por la fuerza a lo largo de la trayectoria L, entre los puntos A y B

Ejemplo

Ejercicio: Calcular la circulación del campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$ N a lo largo de la trayectoria L $y = 1 - x^{1/2}$ entre los puntos A(0,1) y B(1,0) m

Como $dy = -\frac{1}{2}x^{-1/2}dx \quad dz = 0$

$$C_A^B = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_A^B y dx + \int_A^B -x dy = \int_0^1 (1 - x^{1/2}) dx + \int_0^1 \frac{1}{2} x^{1/2} dx =$$

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^{1/2}\right) dx = x - \frac{1}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ J}$$

Por tanto hemos calculado el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$ N para ir desde el punto A(0,1) y B(1,0) m por el camino definido por la trayectoria

Trabajo y Energía Cinética

El trabajo realizado por todas las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética.

$$W_A^B = \int_A^B \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$W_A^B = \int_A^B \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_A^B d\vec{p} \cdot \vec{v} =$$

$$\int_A^B m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right) = \Delta E_{CIN}$$

$$W_A^B \text{(de todas las fuerzas que se ejercen sobre una partícula)} = \Delta E_{CIN}$$

CAMPOS CONSERVATIVOS

Un campo vectorial es CONSERVATIVO cuando la circulación del campo entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida, sino exclusivamente de las posiciones de los puntos inicial y final.

Si el campo vectorial es una Fuerza, como la circulación entre dos puntos tiene el significado del trabajo realizado para ir de uno de los puntos al otro, el que dicha fuerza sea conservativa significa que el valor del trabajo realizado por la fuerza es independiente del camino utilizado, y sólo depende de las coordenadas de los puntos inicial y final.

¿Cómo se comprueba si un campo es conservativo o no?

Método más rápido: Si $\vec{\nabla} \times \vec{S} = 0$ el campo S es conservativo o irrotacional

Si **S**(x,y,z) es conservativo, se puede obtener a partir del gradiente de un campo escalar V(x,y,z)

$$\vec{S} = -\vec{\nabla} V \qquad \vec{\nabla} \times \vec{S} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} V\right) = 0$$

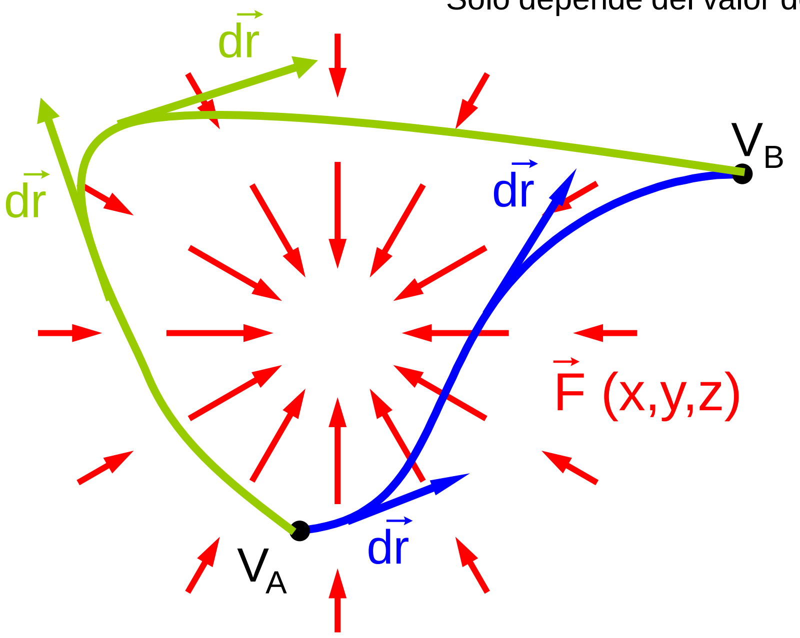
Esta función escalar V se la conoce como FUNCIÓN POTENCIAL de S

CAMPOS CONSERVATIVOS: Circulación

¿Cuánto vale la circulación de un campo F conservativo?

$$C_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V_A - V_B$$

Sólo depende del valor de la función potencial correspondiente en los puntos A y B



Si la trayectoria es cerrada, es decir los puntos inicial y final coinciden, la circulación es cero

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Recordemos: calcular la circulación de una fuerza es calcular el trabajo que realiza

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

CAMPOS CONSERVATIVOS: Función Potencial

Como hemos visto es muy útil conocer la función potencial de la que deriva el campo conservativo

Para el caso concreto de una **FUERZA CONSERVATIVA**, la función potencial de la que deriva, tiene el significado de la **ENERGÍA POTENCIAL** asociada a dicha fuerza.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \left\{ F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \right.$$

¿Cómo se calcula?

$$U = -\int F_x dx \quad \text{o} \quad U = -\int F_y dx \quad \text{o} \quad U = -\int F_z dz$$

Ejemplo: $\vec{F} = \underbrace{(3x^2y^2 + 2z^2)\vec{i}}_{-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}} + \underbrace{2x^3y\vec{j}}_{-\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}} + \underbrace{4xz\vec{k}}_{-\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}}$

$$U = -\int (3x^2y^2 + 2z^2)dx = -y^2x^3 - 2z^2x + C(yz)$$

$$U = -\int 2x^3ydy = -x^3y^2 + C(xz)$$

$$U = -\int 4xzdz = -2xz^2 + C(xy)$$

Tomamos todos los términos que aparecen (sólo 1 vez)

$$U(x,y,z) = -x^3y^2 - 2xz^2 + C$$

Trabajo y Energía Potencial

Uniendo conceptos:

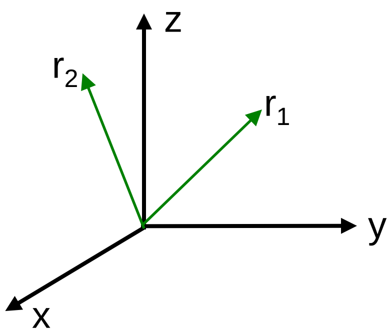
El trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de la Energía Potencial asociada a esa fuerza.

$$W_{x_i}^{x_f} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U = U_{x_i} - U_{x_f}$$

Y por tanto la energía potencial se calcula como: $U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_{x_i}$

IMPORTANTE: Puesto que U_{xi} es una constante, sólo desplaza el valor de U(x). Siempre se puede decidir en que punto se pone el origen de energías potenciales, es decir donde Uxi=0

Fuerza Gravitatoria: $\vec{F} = -mg\vec{k}$



Energía Potencial Gravitatoria

$$U_f(z) = \int_{z_i}^{z_f} mgdz + U_{z_i} = mg(z - z_i) + U_{z_i}$$

Trabajo realizado por F para ir desde r_1 a r_2

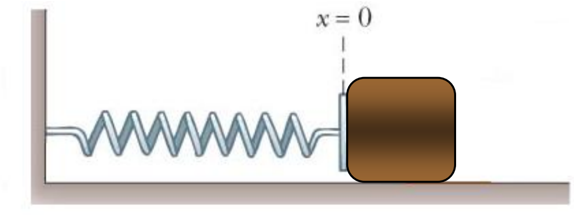
$$(W_{1\to 2}) = U_1 - U_2 = mg(z_1 - z_2)$$

Trabajo y Energía Potencial

Fuerza Elástica:

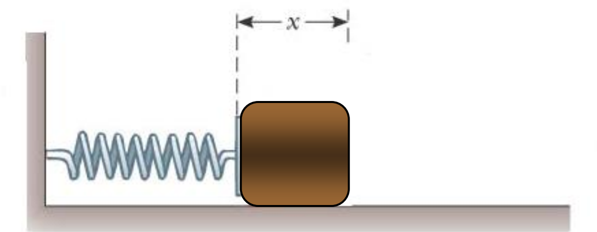
$$\vec{F} = -kx\,\vec{i}$$

X= longitud del muelle – longitud natural del muelle



Energía Potencial Elástica

$$U_f\left(x\right) = -\int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx + U(x_1)_i = \frac{1}{2}kx^2 + U(x_1)$$



Trabajo realizado por el muelle cuando pasa del estado x_1 a x_2

$$\left(W_{1\to2}\right) = U_1 - U_2 = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

La energía potencial elástica se puede entender como energía almacenada en el muelle

F. CONSERVATIVAS: Conservación de la Energía

Recordemos. Si solo actúan fuerzas conservativas:

$$W_{TOTAL} = W_{conserv} = -\sum \Delta U = \Delta E_{cin}$$

La energía mecánica total de un sistema aislado en el que sólo actúan fuerzas conservativas permanece constante.

$$\Delta E_{cin} + \sum \Delta U = 0$$

$$E_{cin}^{ini} + \sum U^{ini} = E_{cin}^{ini} + \sum U^{ini}$$

Se define: $$E_{mec} = E_{cin} + \sum U$$

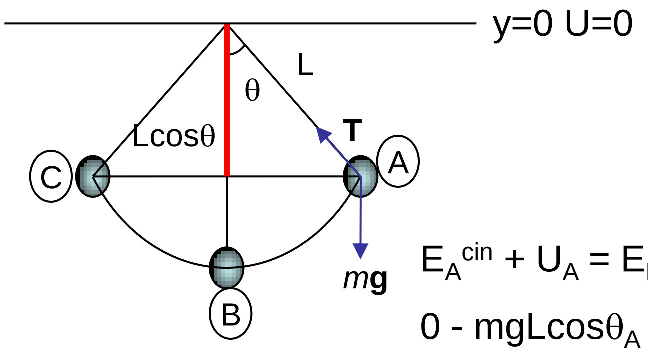
Por tanto: $$\Delta E_{mec} = 0; \quad E_{mec} = cte$$

Para la fuerza gravitatoria:

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Para la fuerza elástica:

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + \tfrac{1}{2}kx_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f$$



$$E_A^{cin} + U_A = E_B^{cin} + U_B$$

$$0 - mgL\cos\theta_A = \tfrac{1}{2} mv_B^2 - mgL$$

$$v_B = \sqrt{2gL\left(1-\cos\theta_A\right)}$$

FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Son ejemplos de fuerzas no conservativas:

- La tensión
- La fuerza de rozamiento
- Las ejercidas por pivotes, clavos, etc

PARA CALCULAR EL TRABAJO realizado por estas fuerzas tenemos que CALCULAR SU CIRCULACIÓN. Es imprescindible detallar la TRAYECTORIA SEGUIDA porque no es independiente de ésta.

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad W_A^B(F_{\text{no conserv}}) = \int_A^B \vec{F}_{\text{no conserv}} \cdot d\vec{r}$$

Las fuerzas no conservativas NO TIENEN asociadas energías potenciales

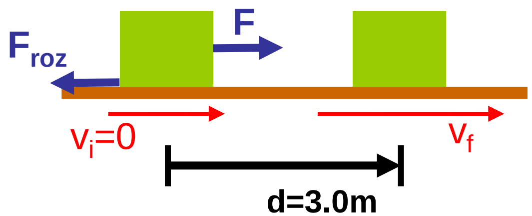
Cuando en un sistema actúan fuerzas conservativas y no conservativas, la variación de la energía mecánica del sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas

$$W_{TOTAL} = W_{F.cons} + W_{F.no\,cons} = \Delta E_{cin}$$

$$W_{F.no\,cons} = \Delta\left(E_{cin} + \sum U\right) = \Delta E_{MEC}$$

Ejemplo: Conservación de la energía

Un bloque de masa 6.0kg inicialmente en reposo se empuja hacia el Este con una fuerza constante e igual a 12 N. El coeficiente de rozamiento dinámico es m_{din}=0.15. Determinar la velocidad del bloque cuando ha recorrido una distancia de 3 m.



TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA $W_{TOTAL} = W_{F.cons} + W_{F.no\,cons} = \Delta E_{cin}$

El trabajo realizado por la fuerza F es

$$W_F = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta = 12\times 3.0\cos\theta = 36(J)$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento Froz es

$$W_{ROZ} = \vec{F}_{ROZ}\bullet\vec{d} = \left|\vec{F}_{ROZ}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta = \left|\mu_{din}mg\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta$$
$$= 0.15\times 6.0\times 9.8\times 3.0\cos 180 = -26(J)$$

El trabajo total es: $W_{TOTAL} = W_F + W_k = 36 - 26 = 10(J)$

$$\Delta E_{CIN} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = W_{TOTAL} \qquad v_f = \sqrt{\frac{2W_{TOTAL}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 10}{6.0}} = 1.8\,m/s$$