CONTENIDO

- Definición y cálculo del centro de masas
- Movimiento del centro de masas
- Fuerzas internas y fuerzas externas
- Energía cinética de un sistema de partículas
- Teoremas de conservación para un sistema de partículas

BIBLIOGRAFÍA

SUSAN M. LEA, J.R. BURKE. La naturaleza de las cosas

Cap. 9.3: Centro de masas
Cap. 9.4: Conservación del momento angular
Cap. 10.1, 10.2.1, 10.2.3: Colisiones

WOLFGANG BAUER Y GARY D. WESTFALL, FÍSICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS, Volumen I, McGraw-Hill, 2011

Cap. 5: Energía cinética, trabajo y potencia
Cap. 6: Energía potencial y conservación de la energía

SEARS, ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN. FÍSICA UNIVERSITARIA Pearson-Addison Wesley, 1998

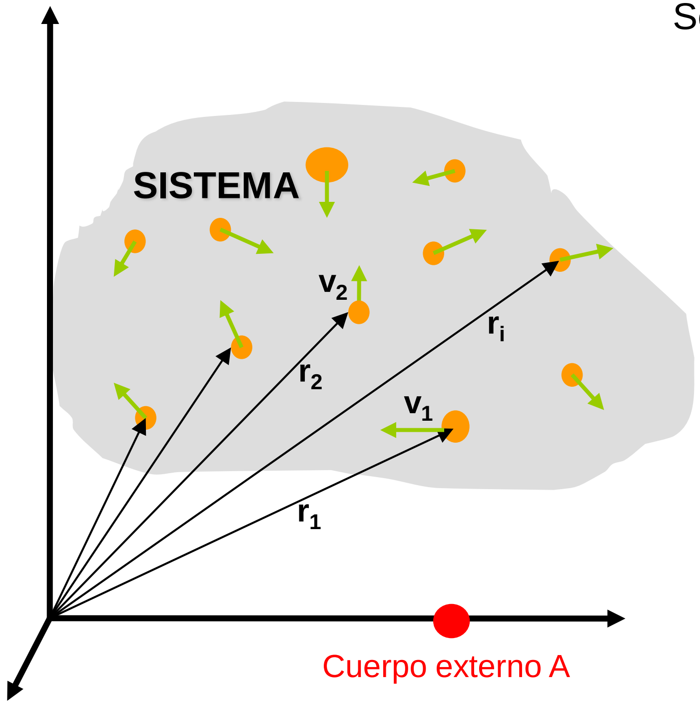
Cap. 8: Impulso y choques

TIPLER, PA. FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA Ed Reverté 2005

Cap. 8.1, 8.3-8.6: Sistema de Partículas y conservación del momento lineal

DEFINICIÓN. CENTRO DE MASAS

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas que interaccionan. El problema puede plantearse tratando cada partícula por separado y solucionando la segunda ley de Newton para cada una de ellas, pero suele ser complicado. Al hacer un tratamiento conjunto, veremos como el problema se simplifica.



Sea un sistema formado por N partículas

Se define el CENTRO DE MASAS (CM) como una partícula que tiene toda la masa del sistema

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Su vector de posición viene dado por la media ponderada de los vectores de posición de las N partículas

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

CENTRO DE MASAS

Su velocidad y aceleración se obtienen derivando respecto del tiempo

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+.....+m_N\vec{v}_N}{M}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+....+m_N\vec{a}_N}{M}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i$$

El momento lineal total:

$$\vec{p}(total)=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i=\vec{v}_{CM}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i=\vec{v}_{CM}\cdot M$$

Es decir, el momento lineal total del sistema = al momento lineal del centro de masas

$$\vec{p}(total)=\vec{p}_{CM}$$

CENTRO DE MASAS

Ejemplo: En un instante dado, tres partículas de masas m_1 = 1 kg, m_2 = 2.2 kg, y m_3 = 3.4 kg están situadas formando un triángulo equilátero, y sus posiciones son: r_1=(0,0), r_2=(140,0)cm y r_3=(70,121) cm. ¿Dónde está el centro de masas del sistema? Si v_1=2**i** m/s, v_2=3**j** m/s y m_3 está en reposo. Calcular la velocidad del centro de masas y el momento lineal total

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{(1.0)(0) + (2.2\text{ kg})(1.4\text{m}) + (3.4\text{ kg})(0.7\text{m})}{6.6\text{ kg}} = 0.83\text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (2.2\text{ kg})(0) + (3.4\text{ kg})(1.21\text{m})}{6.6\text{ kg}} = 0.623\text{ m}$$

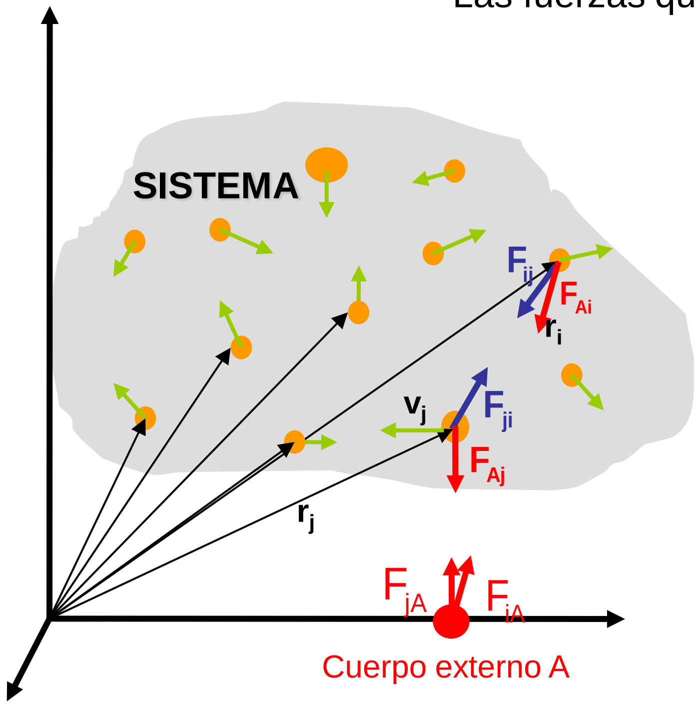
$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{M} = \frac{1\cdot 2\vec{i} + 2.2\cdot 3\vec{j} + 3\cdot 0}{6.6} = 0.303\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{p}(\text{total}) = M\cdot\vec{v}_{CM} = 6.6\cdot(0.303\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 6.6\vec{j}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

$$\sum_{i} \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Las fuerzas que se ejercen sobre las partículas del sistema son:



$$\vec{F} = \vec{F}^{\,\text{internas}} + \vec{F}^{\,\text{externas}}$$

ejercidas entre las partículas que forman el sistema

ejercidas por partículas externas del sistema a partículas del sistema

Si sumamos a todas las partículas

$$\vec{F} = \cancel{\sum_{i,j}^{N} \vec{F}_{ij}} + \sum_{i} \vec{F}_i^{ext}$$

Las fuerzas internas se cancelan: son pares de acción y reacción

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

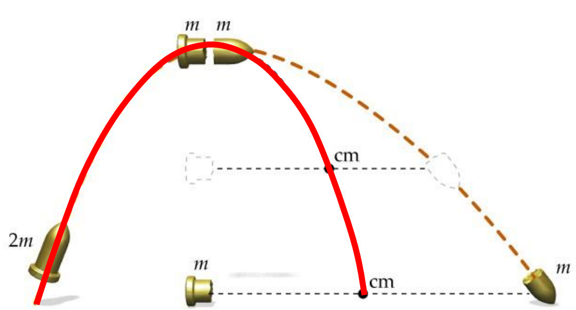
$$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i^{ext}=\sum_i m_i\vec{a}_i=\sum_i^N m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\sum_i^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$=M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}=M\cdot\vec{a}_{CM}$$

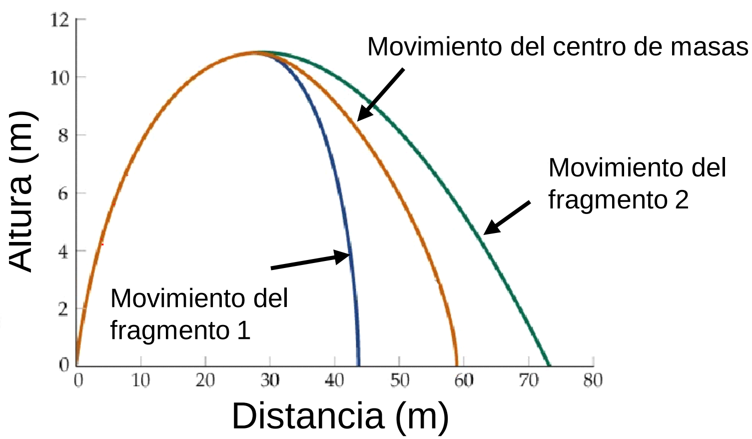
$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext}=M\cdot\vec{a}_{CM}}$$

El centro de masas (CM) se mueve como una partícula que tiene toda la masa del sistema y sobre la que se aplica la resultante de las fuerzas externas

Ejemplo: en una bala que explota, la única fuerza externa es el peso. Por tanto El CM sigue la misma trayectoria parabólica que llevaba antes de la explosión, porque el peso del CM no cambia debido a la explosión. Nota: la explosión es una fuerza interna



La línea roja representa la trayectoria del CM



CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

$$\sum \vec{F}^{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

Si $\sum \vec{F}^{ext} = 0$

$\frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = 0$

$$\vec{p}_{CM} = cte$$

Si $\sum \vec{F}_x^{ext} = 0 \Rightarrow p_x(CM) = cte$

Si $\sum \vec{F}_y^{ext} = 0 \Rightarrow p_y(CM) = cte$

Si $\sum \vec{F}_z^{ext} = 0 \Rightarrow p_z(CM) = cte$

Si la resultante de Fuerzas es cero, el centro de masas o está quieto, o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme

MOMENTO ANGULAR

El momento angular total del sistema respecto el punto O es:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \times \vec{v}_i)$$

Si tenemos en cuenta que $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F} = \vec{M}_0$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{exter} + \cancel{\sum_{i,j}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{exter} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_0$$

Las fuerzas internas no modifican el momento angular de un sistema de partículas

Si todas las fuerzas son internas, o la suma del momento de las fuerzas externas es cero, el momento angular total se conserva

TRABAJO Y ENERGÍA

ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de la energía cinética de cada una de las partículas

$$E_{TOTAL}^{CIN} = \sum_{i=1}^{N} E_i^{CIN} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i\right|^2 = E_{CM}^{CIN}$$

TRABAJO

El trabajo total es la suma de los trabajos de todas las fuerzas que se ejercen a las partículas, tanto internas como externas. El trabajo realizado por las fuerzas internas no tiene porqué ser cero.

$$W^{externas} + W^{internas} = \Delta E_{TOTAL}^{CIN}$$

ENERGÍA POTENCIAL

Cada fuerza conservativa, sea interna o externa, tiene asociada una energía potencial

Ejemplo: energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas

$$U_{(gravitatorio)} = \sum_{i=1}^{N} m_i g h_i = g \sum_{i=1}^{N} m_i h_i = g M h_{CM}$$

TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

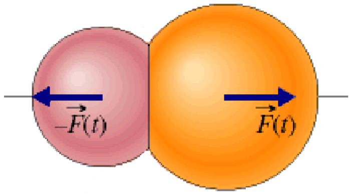
Al igual que para una partícula, para un sistema de partículas es siempre interesante evaluar si, bajo las condiciones del problema se cumple:

- CONSERVACIÓN DE **P** TOTAL
- CONSERVACIÓN DE **L** TOTAL
- CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

COLISIONES

Una colisión es una interacción entre dos o más objetos en la que se intercambian momento lineal y energía, de manera que se modifica su estado de movimiento.

Las fuerzas que se ejercen las partículas (fuerzas internas), son relativamente intensas y de corta duración. Su valor no tiene que ser constante durante el tiempo que dura el choque. Es muy difícil cuantificarlas.



F internas >>>F externas

F externas ≈ 0

IMPULSO

Cambio del momento lineal de una partícula $\vec{I}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}dt=\Delta\vec{p}$

Se puede definir una fuerza media tal que: $I=\left|F_{media}\right|\cdot\Delta t$

COLISIONES

Si durante la colisión $\mathbf{F}^{ext}$ =0, de los teoremas de conservación se obtiene:

$$\frac{d\vec{p}_{TOTAL}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{TOTAL} = cte$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOTAL}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{TOTAL} = cte$$

$$\Delta E^{CIN}_{TOTAL} = W^{internas}$$

$$\vec{p}_{TOTAL} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots. \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots\Big|^{ANTES} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots\Big|^{DESPUÉS}$$

$$\vec{L}_{TOTAL} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots. \qquad \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots\Big|^{ANTES} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots\Big|^{DESPUÉS}$$

Choque elástico:

$$\text{Si } W^{internas} = 0 \quad \Rightarrow \Delta E^{CIN}_{TOTAL} = 0 \quad \Rightarrow E^{CIN}_{TOTAL}\Big|^{ANTES} = E^{CIN}_{TOTAL}\Big|^{DESPUES}$$

Choque inelástico:

$$\text{Si } W^{internas} \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta E^{CIN}_{TOTAL} \neq 0 \quad \Rightarrow E^{CIN}_{TOTAL}\Big|^{ANTES} \neq E^{CIN}_{TOTAL}\Big|^{DESPUES}$$

Choque completamente inelástico:

Las partículas quedan pegadas después del choque. No se conserva la E^{CIN}_{TOTAL}