CONTENIDO

- **Definición de sólido rígido**
- **Cálculo de la posición del centro de masas**
- **Movimiento de rotación y de traslación**
- **Movimiento del sólido rígido en el plano**
- **Momento de inercia**
- **Teorema de Steiner**

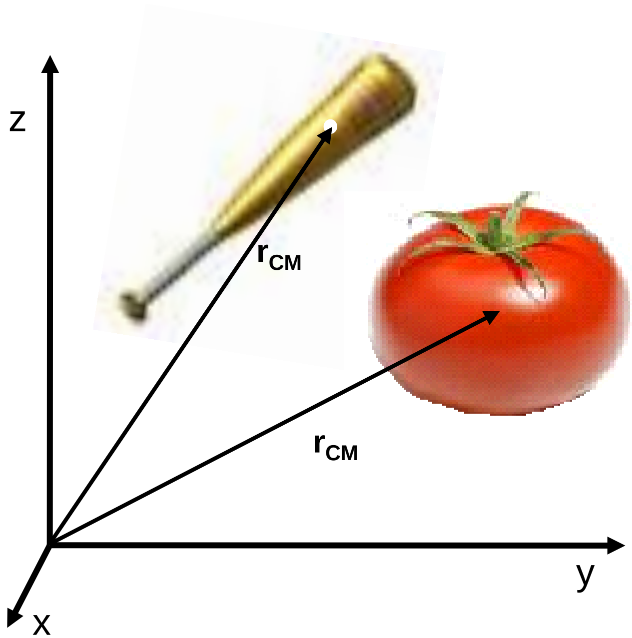
BIBLIOGRAFÍA

BEDFORD, FOWLER, DINÁMICA. Mecánica para Ingeniería, Addison Wesley
Capítulo 6: Cinemática plana de cuerpos rígidos

TIPLER, PA. FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA Ed Reverté 2005
Capítulo 9.3: Momento de Inercia

DEFINICIÓN DE SÓLIDO RÍGIDO

Llamamos sólido rígido a todos los objetos que no se deforman bajo la aplicación de fuerzas. Es un tipo concreto de sistema de partículas en el que la distancia entre todo par de puntos permanece constante. El tipo de movimiento que realicen bajo la aplicación de fuerzas dependerá de su forma y del punto en que cada fuerza se aplique.



A partir de la definición de centro de masas de un sistema de partículas:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$$

El CENTRO DE MASAS de un sólido rígido se calcula como:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{M}$$

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\int z\,dm}{M}$$

CENTRO DE MASAS

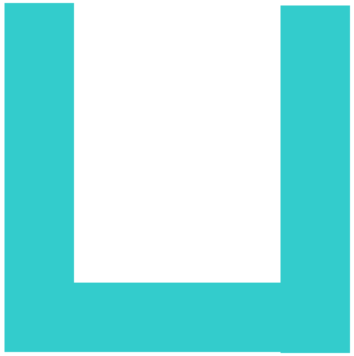
- Si un cuerpo de densidad constante tiene alguna simetría, su centro de masas coincide con el punto de simetría

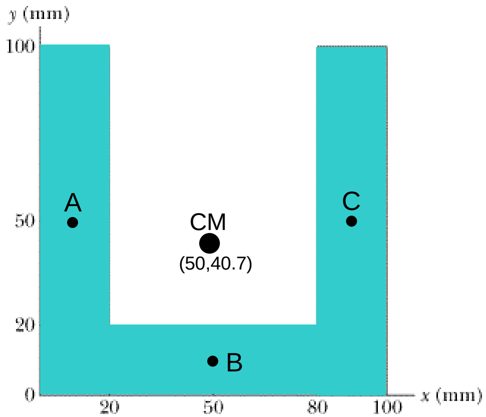
- Si un cuerpo tiene algún eje de simetría, el centro de masas se halla sobre dicho eje

- Si el valor de g es el mismo en todos los puntos del sólido el centro de masas coincide con el centro de gravedad (punto en el que se aplica el peso de un objeto)

Pregunta: ¿dónde están los centros de masa de: un cubo, un cono o un donut?

¿Cómo se calcula la posición del centro de masas de este objeto?

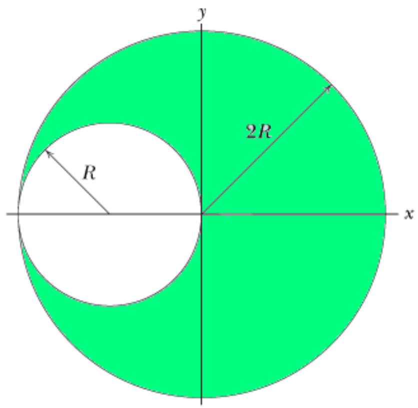


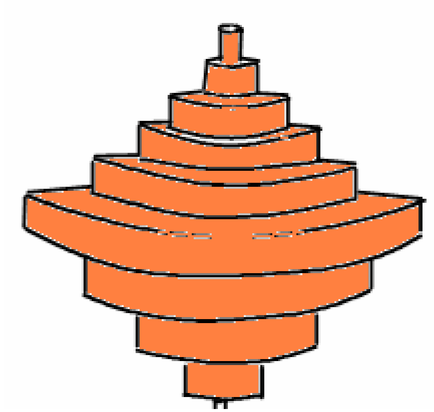


Se puede descomponer en tres rectángulos de masas m_A, m_B y m_C.Cada uno de ellos tiene su CM en su centro geométrico (puntos A, B y C). Para calcular el CM total lo calculamos como si fuera un sistema de 3 partículas

CENTRO DE MASAS

¿Y de estos?





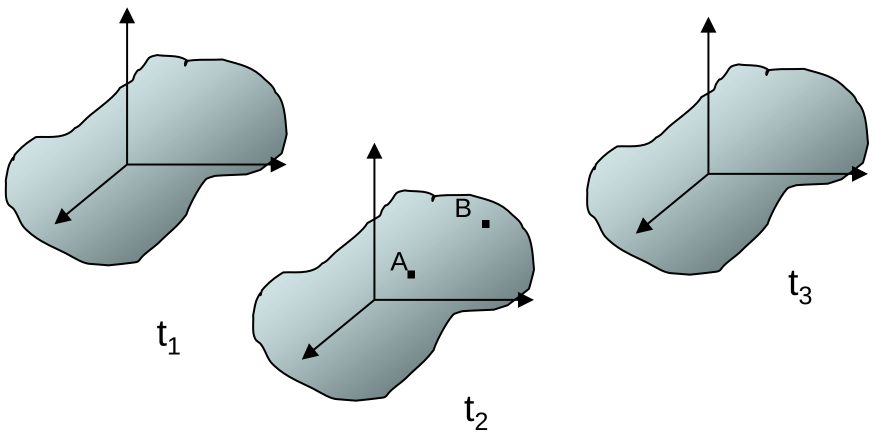
La velocidad y aceleración del CENTRO DE MASAS se obtienen derivando respecto del tiempo

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\int \vec{v}\, dm \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\int \vec{a}\, dm$$

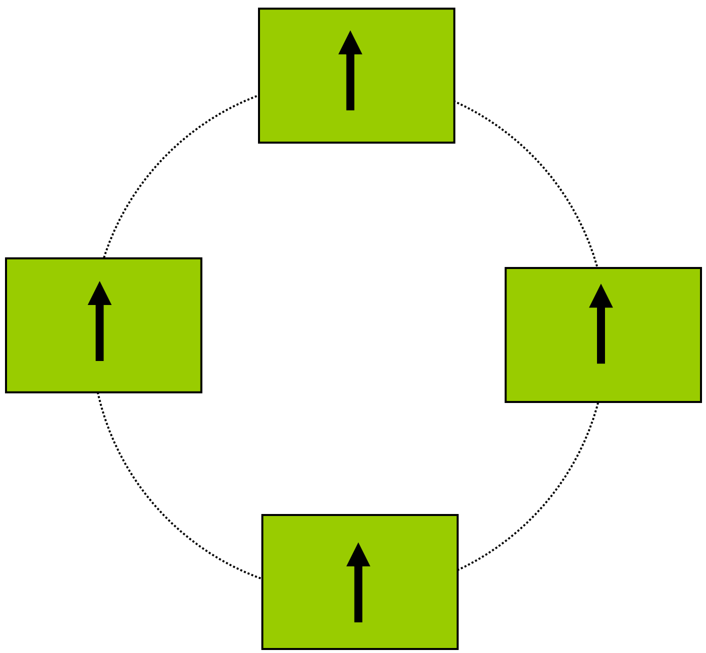
MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

TRASLACIÓN: Cada punto de un cuerpo rígido tiene la misma **v** y **a**, por lo que su movimiento se describe completamente si se describe el movimiento de uno sólo de sus puntos.

Si colocamos un sistema de coordenadas fijo al sólido, la dirección de los ejes de coordenadas de ese sistema no cambiará respecto a un observador en un sistema de referencia inercial

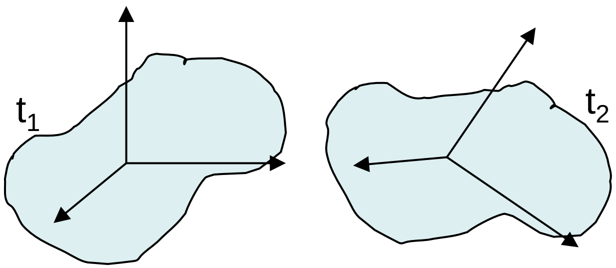


$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_{CM}$$

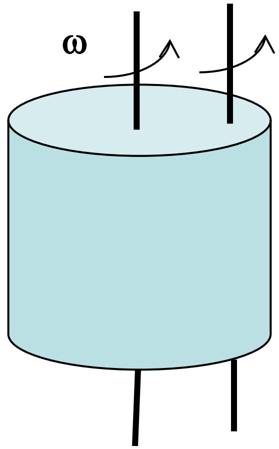


MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

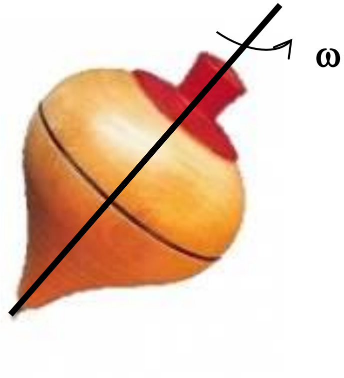
ROTACIÓN: alrededor de un punto, un eje fijo o un eje móvil. La dirección de los ejes de coordenadas fijos al sólido cambia respecto al observador en el sistema de referencia fijo.



Alrededor de un eje fijo



Alrededor de un eje móvil

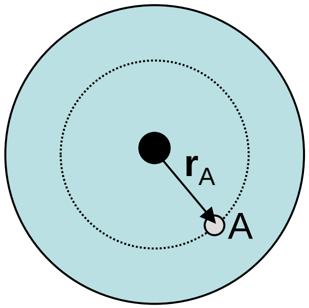


Alrededor de un punto

El centro de rotación corresponde al punto en el que la velocidad del sólido es cero. Si el punto alrededor del que rota cambia continuamente, lo llamamos centro instantáneo de rotación

Rotación

En una rotación, todos los puntos del sólido (salvo el centro de rotación) describen circunferencias



$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

$$\left|\vec{v}_A\right| = \omega r_A \,\mathrm{sen} 90 = \omega r_A$$

Cada punto realiza un movimiento circular:

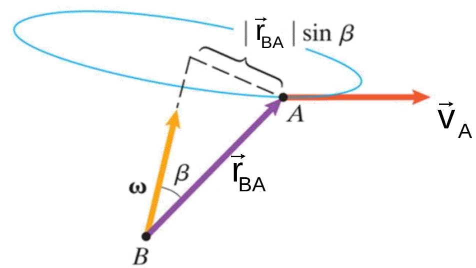
- Si ω = cte $\Rightarrow$ movimiento circular uniforme

$$\theta = \theta_0 + \omega.t$$

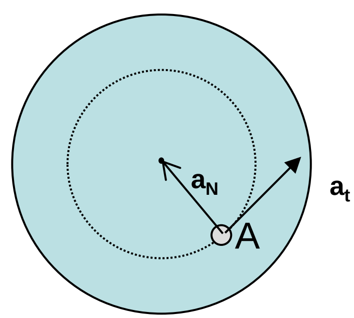
- Si α = cte $\Rightarrow$ movimiento circular uniformemente acelerado

$$\theta = \theta_0 + \omega_0.t + 1/2\, \alpha.t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha.t$$



Por tanto habrá que considerar en cada punto el vector aceleración como la suma de la componente normal y de la tangencial



$$\left|a_t\right| = \alpha \cdot r$$

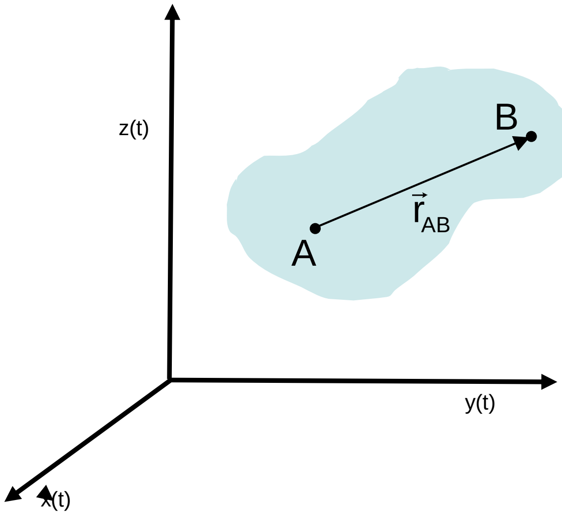
$$\left|a_N\right| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

El movimiento general de un sólido rígido será la combinación de un movimiento de traslación y de rotación

TRASLACIÓN + ROTACIÓN

La velocidad y aceleración de CUALQUIER PUNTO DEL SÓLIDO se pueden calcular a partir de su velocidad angular y de la velocidad y aceleración de cualquier otro punto del sólido.



por trasladarse

por rotar

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{AB} + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}\right]$$

MOVIMIENTO PLANO

Un sólido rígido realiza un movimiento plano si su centro de masas se mueve siempre en el mismo plano, y un eje del sistema de referencia fijo al sólido permanece perpendicular al plano.

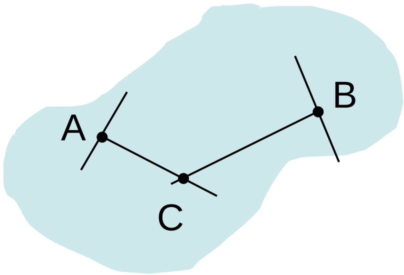
Ejemplos:

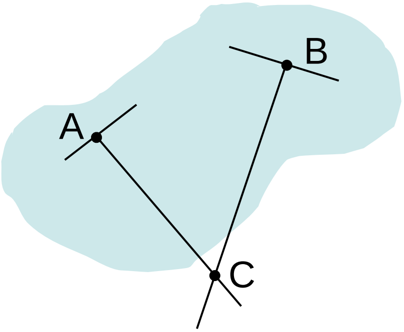
el movimiento de las ruedas de un coche

el movimiento de los pistones de un motor

Centro instantáneo de rotación en un movimiento plano

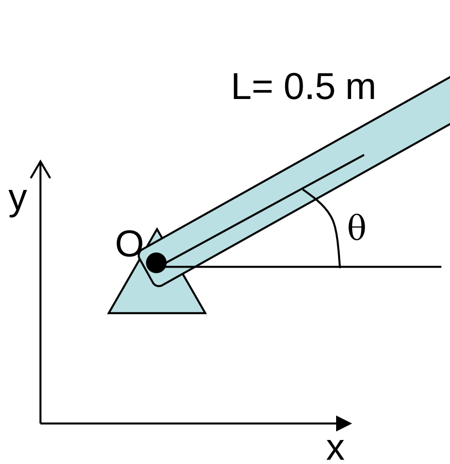
Para localizarlo: supongamos que conocemos las direcciones de movimiento de dos puntos A y B del sólido. Dibujamos líneas que pasan por A y B y que sean perpendiculares a sus direcciones de movimiento. El punto donde se cortan, C, corresponde al centro instantáneo de rotación. No tiene porqué estar dentro del cuerpo.





$$\vec{v}_C = 0$$

EJEMPLO



ω = 2rad/s

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}$$

Sabemos que en O la velocidad es cero

$$\vec{\omega} = (0,0,2)\,\text{rad/s}$$

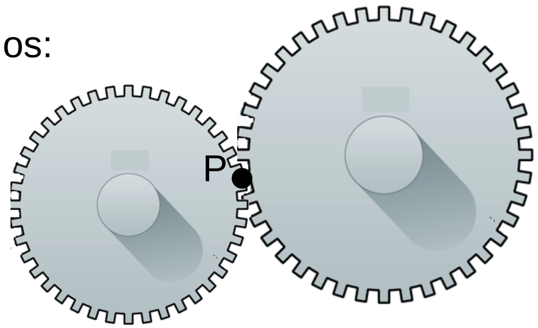
$$\vec{r}_{OA} = 0.5\cos\theta\,\vec{i} + 0.5\,\text{sen}\,\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = 0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0.5\cos\theta & 0.5\,\text{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

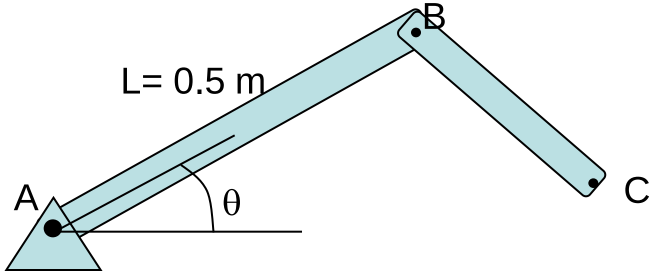
SÓLIDOS CONECTADOS

Cuando dos sólidos están unidos o en contacto, debemos analizar si alguna o algunas magnitudes cinéticas de ambos sólidos tienen que tener el mismo valor.

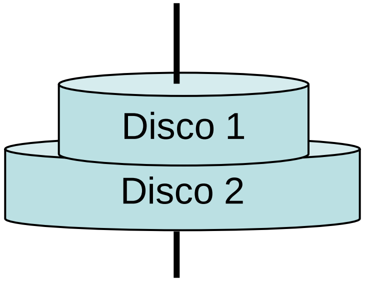
Ejemplos:



La velocidad y aceleración lineales de los engranajes en el punto de contacto tiene que ser la misma



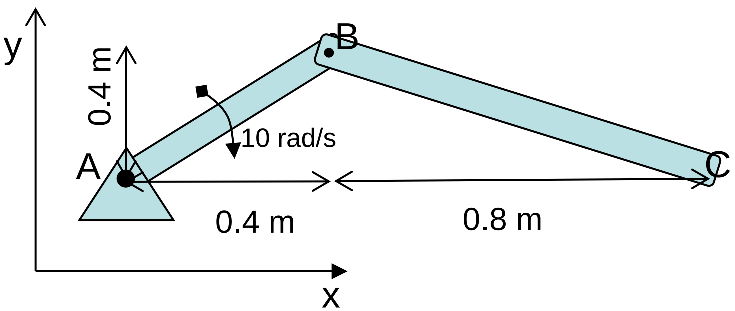
El punto B pertenece a las barras AB y BC. Hay que imponer a cada una de las barras que en el punto B tengan la misma velocidad lineal. Lo mismo sucede con la aceleración lineal.



Si se mueven juntos,
ambos discos tienen que tener las mismas ω y α

EJEMPLO

Determinar la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto C si el punto C sólo se puede mover en la horizontal



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} =$$

$$0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{BC} =$$

$$v_C \vec{i} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 0.8 & -0.4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 + 0.4\omega_{BC})\vec{i} + (-4 + 0.8\omega_{BC})\vec{j}$$

Como v_C sólo puede tener componente x:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{BC} =$$

$$v_C = 4 + 0.4\omega_{BC}$$

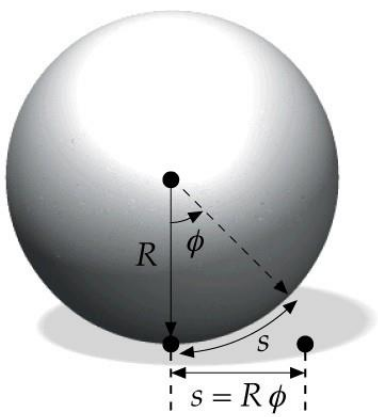
$$0 = -4 + 0.8\omega_{BC}$$

$$\omega_{BC} = (0, 0, 5) \text{rad/s}$$

RODADURA

Este movimiento corresponde a un sólido (disco, cilindro, esfera, etc) que rueda sin deslizar. Por ejemplo la rueda de un coche (si no está patinando).

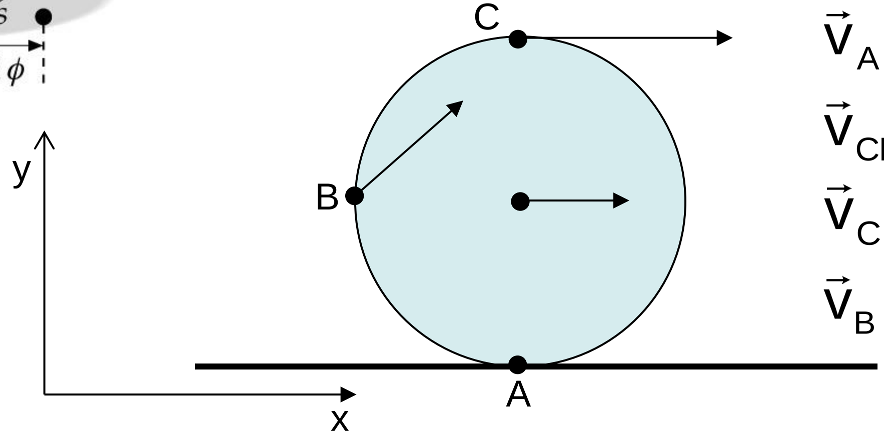
IMPORTANTE: El punto en contacto con el suelo tiene velocidad lineal cero. Como la parte del sólido que está en contacto con el suelo es siempre distinta, corresponde con un centro instantáneo de rotación



En módulo

$s = R \cdot \Phi$ (el ángulo en radianes) $\quad v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega \quad a_{CM} = \frac{dv}{dt} = R \cdot \alpha$

Si utilizamos $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$



$$\vec{v}_A = 0$$

$$\vec{v}_{CM} = \omega R \vec{i}$$

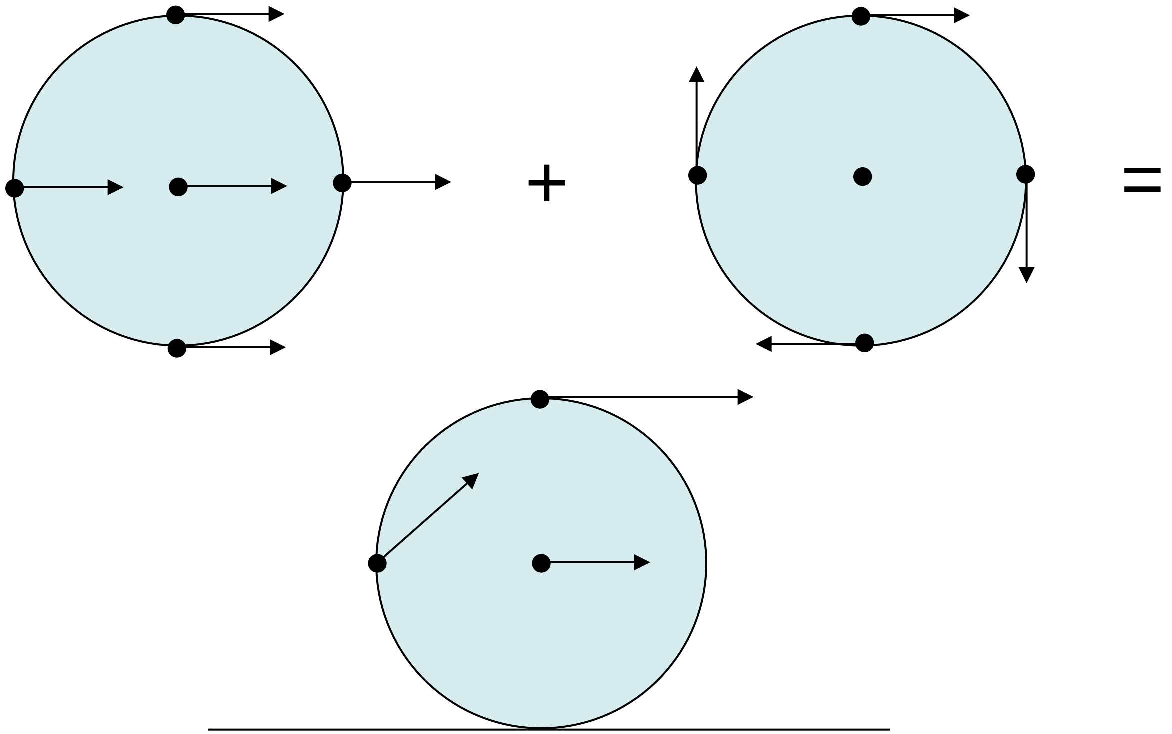
$$\vec{v}_C = 2\omega R \vec{i}$$

$$\vec{v}_B = \omega R \vec{i} + \omega R \vec{j}$$

RODADURA

Este movimiento puede estudiarse como:

LA **COMBINACIÓN DE UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN Y DE UN MOVIMIENTO DE ROTACIÓN RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS**



MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia de una partícula con respecto a un eje de rotación se define como:

$$I = m \cdot R^2$$ donde R representa la distancia de la partícula al eje de giro

Para un sistema de partículas, el momento de inercia respecto a un eje será:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

- depende de la distribución de la masa del sistema: cuanto más alejada esté la masa del eje de giro, mayor es el momento de inercia

- el momento de inercia de un objeto depende de donde esté el eje de rotación

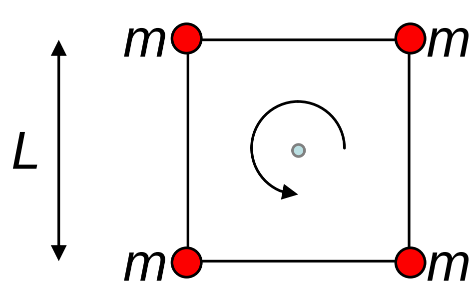
- el papel del momento de inercia en la rotación es el mismo que el de la masa en la traslación (lo veremos en dinámica)

Para un sólido rígido: $I = \int r^2 dm$

MOMENTO DE INERCIA

Calcula el momento de inercia de 4 masas puntuales de masa m colocadas en las esquinas de un cuadrado de lado L, respecto un eje que pasa por su centro y es perpendicular al cuadrado

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

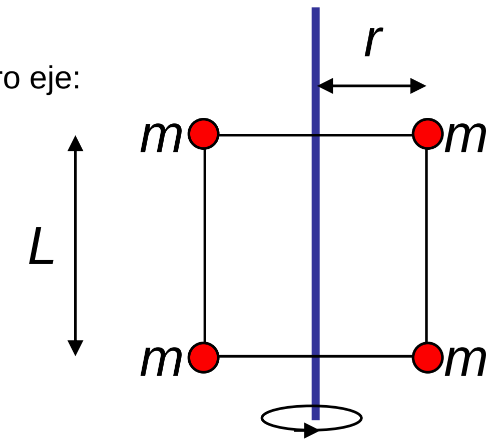


$$r^2 = 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$$

Como

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} = 4m\frac{L^2}{2} = 2mL^2$$

Respecto a este otro eje:



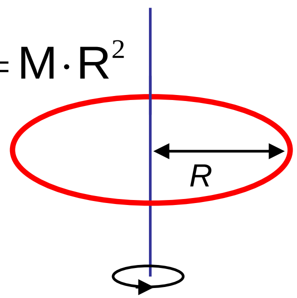
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} = 4m\frac{L^2}{4} = mL^2$$

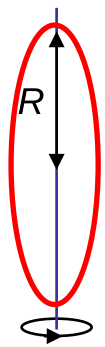
MOMENTO DE INERCIA

Algunos ejemplos de momento de inercia de sólidos:

Anillo de masa M

$$I = M \cdot R^2$$

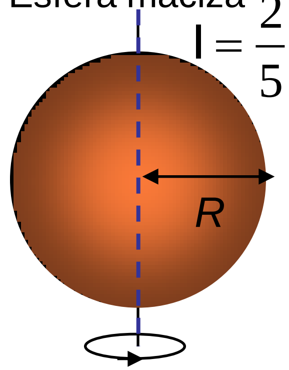




$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$

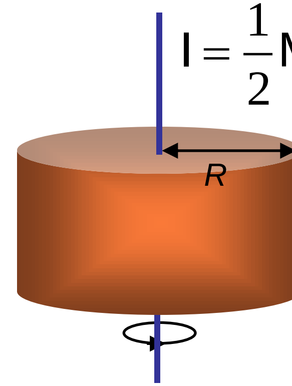
Esfera maciza

$$I = \frac{2}{5} M \cdot R^2$$



Cilindro macizo

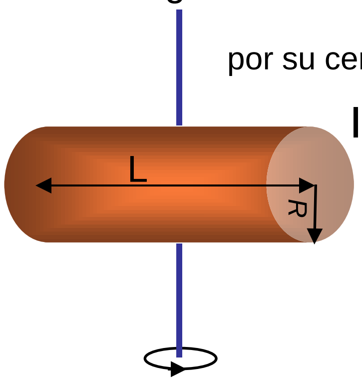
$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$



Barra delgada

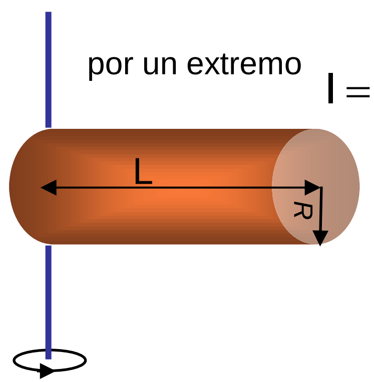
por su centro

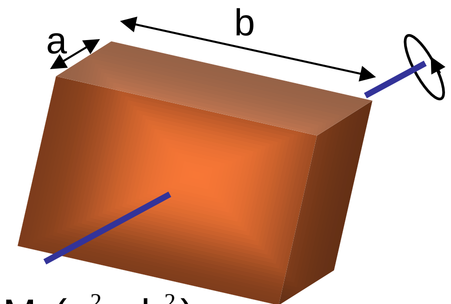
$$I = \frac{1}{12} M \cdot L^2$$



por un extremo

$$I = \frac{1}{3} M \cdot L^2$$





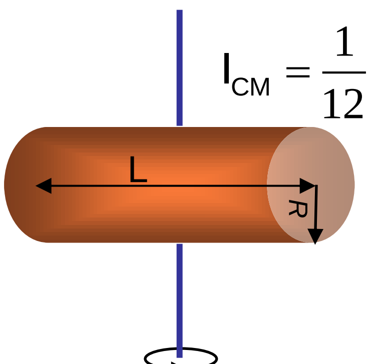
$$I = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + b^2)$$

MOMENTO DE INERCIA

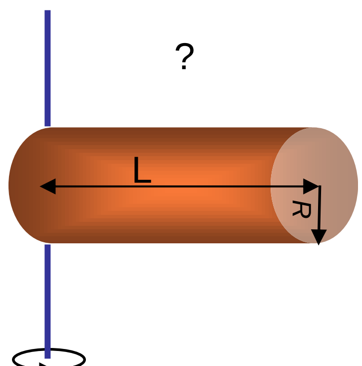
TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

Si se conoce el momento de inercia de un sólido respecto a un eje que pasa por su centro de masas, el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior situado de éste a una distancia D, viene dado por:

$$I = I_{CM} + M \cdot D^2$$



$$I_{CM} = \frac{1}{12} M \cdot L^2$$



?

$$D = \frac{L}{2}$$

$$I = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M \cdot L^2 + \frac{1}{4} M \cdot L^2 = \frac{1}{3} M \cdot L^2$$