CONTENIDO

- Ecuación de traslación de un sólido rígido
- Momento angular de un sólido rígido
- Ecuación de rotación de un sólido rígido
- Equilibrio estático.
- Conservación del momento angular
- Energía cinética de rotación
- Trabajo y potencia de rotación
- Conservación de energía
- Movimiento de rodadura

B. Savoini / M.A. Monge. Dpto. Física. UC3M

BIBLIOGRAFÍA

BEDFORD, FOWLER, DINÁMICA. Mecánica para Ingeniería, Addison Wesley
- Cap. 7: Dinámica bidimensional de cuerpos rígidos
- Cap. 8: Energía y cantidad de movimiento en la dinámica plana de cuerpos rígidos

WOLFGANG BAUER Y GARY D. WESTFALL, FÍSICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS, Volumen I, McGraw-Hill, 2011
- Cap. 8: Sistema de partículas y objetos extensos
- Cap. 10: Rotación
- Cap. 11: Equilibrio estático

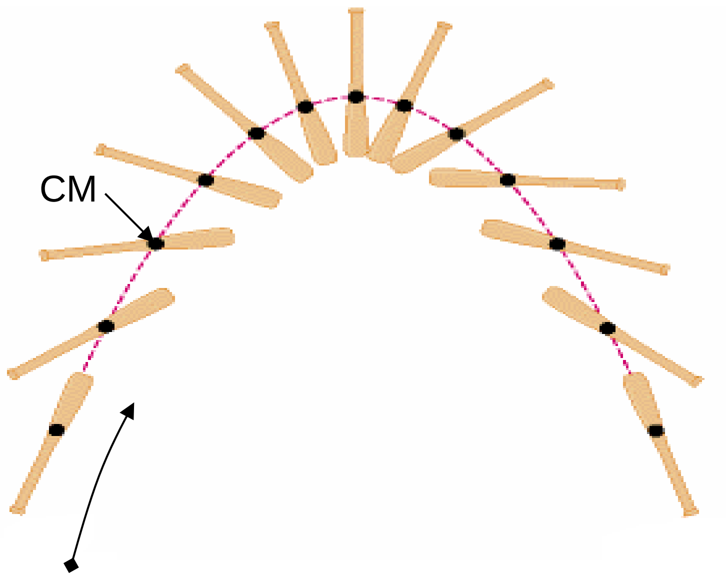
TIPLER, PA. FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA Ed Reverté 2005
- Cap. 9: Rotación
- Cap. 10: Conservación del momento angular
- Cap. 12.1-12.7: Equilibrio estático

SUSAN M. LEA, J.R. BURKE. La naturaleza de las cosas
- Cap.11: Cuerpos rígidos en equilibrio
- Cap.12: Dinámica de los cuerpos rígidos

SEARS, ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN. FÍSICA UNIVERSITARIA Pearson-Addison Wesley, 1998
- Cap. 9: Rotación de cuerpos rígidos
- Cap. 10: Dinámica del movimiento de rotación
- Cap. 11.1-11.4: Equilibrio

MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Hemos visto en el tema anterior que el movimiento general de un sólido rígido es una combinación entre un movimiento de traslación y movimientos de rotación.



El movimiento de la figura se describe como:

- El centro de masas (CM) se traslada bajo la acción de la fuerza de gravedad, y por tanto realiza un movimiento parabólico

- El sólido rota respecto al centro de masas

TRASLACIÓN

Todos los puntos del sólido se mueven con la misma velocidad, por tanto sólo necesitamos determinar el movimiento del centro de masas.

Ecuación de movimiento de traslación: $\sum \vec{F}^{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM} = \dfrac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$

Conservación del momento lineal

$$\text{Si } \sum \vec{F}^{ext} = 0 \qquad \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = 0 \qquad \vec{p}_{CM} = cte$$

Se resuelve considerando el sólido como una partícula que tiene toda la masa del sistema

Es decir, el movimiento de traslación de un sólido rígido se resuelve como el de una partícula que tiene toda la masa del sólido.

ROTACIÓN

Para un sistema de partículas, encontramos la relación entre el momento angular total respecto a un punto, y el momento de las fuerzas respecto ese mismo punto

$$\frac{d\vec{L}_o^{total}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{exter} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{o_i}^{exter}$$

donde: $\vec{L}_{o_i} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i)$

¿Cuánto vale **L** para un sólido rígido?

Si particularizamos a un sólido rígido que gira respecto a un eje: (llamamos Z al eje y tomamos el punto O como un punto fijo)

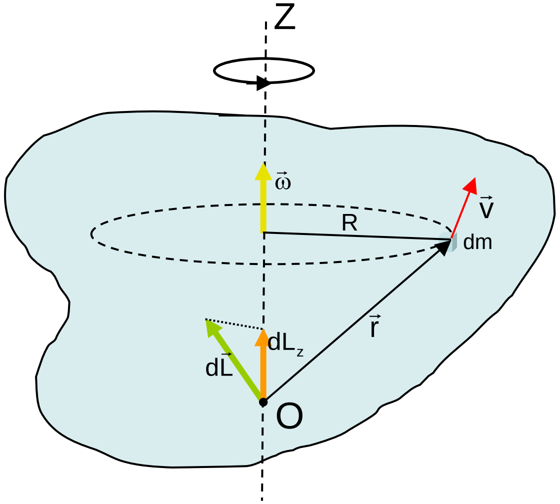
$$d\vec{L}_o = dm(\vec{r} \times \vec{v})$$

Su proyección en el eje Z vale:

$$dL_z = dm \cdot R^2 \cdot \omega$$

Sumando a todos los trocitos del sólido:

$$L_Z = \int dL_z = \int dm \cdot R^2 \cdot \omega = \omega \cdot \int R^2 dm = \omega \cdot I_Z$$



$$\boxed{L_Z = I_Z \cdot \omega}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA ROTACIÓN

En general el momento angular L de un sólido no es paralelo a ω. Sin embargo, para cada sólido hay tres direcciones perpendiculares entre sí, para las cuales el momento angular y omega si son paralelos. Estos ejes se llaman ejes principales de inercia.

Los ejes principales: coinciden con los ejes de simetría del sólido

Cuando el sólido rota alrededor de un eje principal, se cumple:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Ecuación de movimiento de un sólido rígido que rota alrededor de un eje principal que tiene un punto fijo O en un sistema inercial

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{exter}$$

Sustituyendo:

$$\frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{M}_o^{exter}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Cuando el eje de rotación no tiene un punto fijo en un sistema inercial, debemos tomar el centro de masas como referencia para calcular los momentos de las fuerzas y el momento angular.

En este caso la ecuación de movimiento queda:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{exter} \qquad \vec{M}_{CM}^{exter} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

aún cuando el centro de masas no esté en reposo

Cuando se aplican las leyes de Newton de la traslación y la rotación se puede obtener información sobre:

- el movimiento del sólido
- las fuerzas que actúan sobre él
- el punto de aplicación de dichas fuerzas

Pasos a seguir:

1º dibujar el diagrama de cuerpo libre situando las fuerzas en su punto de aplicación
2º aplicar las ecuaciones de movimiento. Elegir en primer lugar un sistema de referencia adecuado.
3º si es necesario, determinar la relación entre la aceleración del centro de masas y la aceleración angular

EQUILIBRIO ESTÁTICO

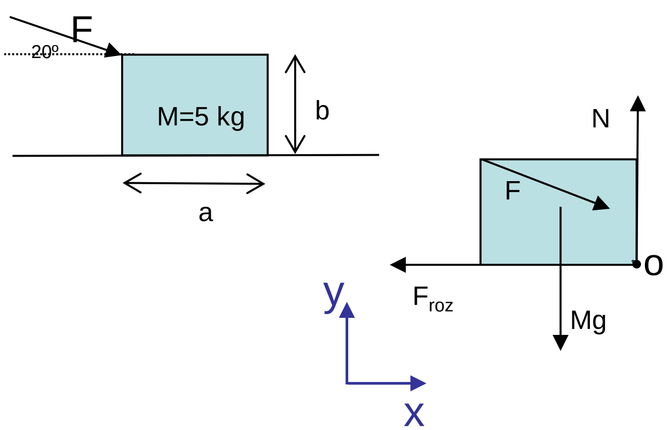
Un sólido está en equilibrio si no tiene aceleración lineal, **a**, ni aceleración angular, α. Las condiciones de equilibrio son:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \vec{M} = 0$$

Ejemplo:

¿Cuál es la fuerza máxima que se le puede aplicar al bloque para que no se mueva (trasladar ni rotar)? Existe rozamiento con el suelo

debemos considerar el punto de aplicación de las fuerzas en la rotación



Ec. traslación

$$\sum \vec{F} = 0 \quad F\cos 20 - F_{roz} = 0$$

$$N - Mg - F\,\text{sen}\,20 = 0$$

$$F_{roz} = F_{roz\,estatica} \le \mu_{est} N$$

Sustituyendo: $F \le \dfrac{\mu(Mg + F\text{sen}20)}{\cos 20}$

Ec. rotación

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

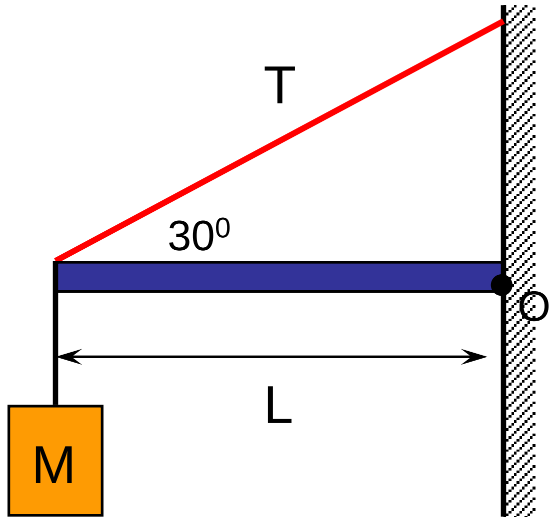
$$Mg\frac{a}{2} + aF\text{sen}20 - bF\cos 20 = 0$$

$$F \le \frac{aMg}{2(a\,\text{sen}20 - b\cos 20)}$$

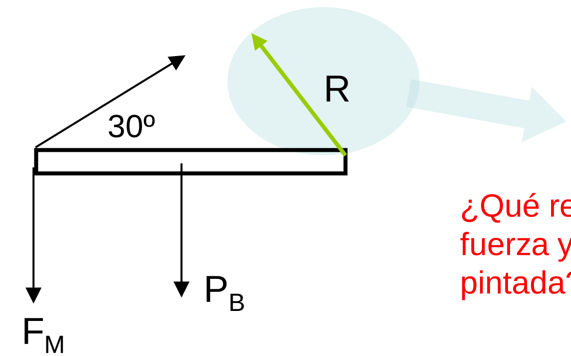
Por tanto F tiene que ser < que el valor más pequeño de los anteriores

EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ejemplo: ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda?



El diagrama de cuerpo libre de la barra azul es



¡OJO!

¿Qué representa esta fuerza y por qué está así pintada?

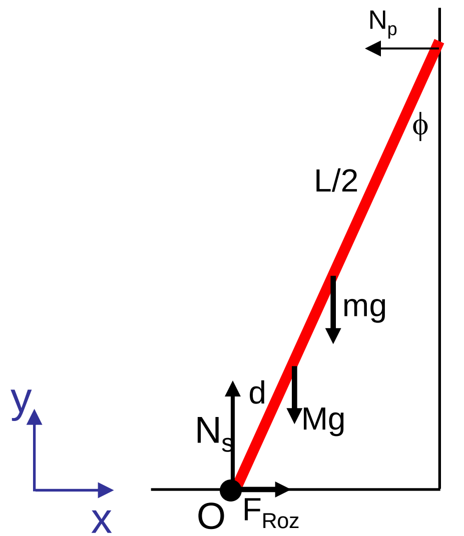
La fuerza R la ejerce la pared en el punto de unión

Solución:

$$T = \frac{P_B/2 + Mg}{\mathrm{sen}\,30} \qquad R_X = \frac{P_B/2 + Mg}{\tan 30} \qquad R_Y = P_B/2$$

Ejemplo

Escalera de masa m está apoyada en la pared. Una persona de masa M sube por ella. En el suelo hay rozamiento pero en la pared no.



Para que la escalera no se mueva, no tiene ni que trasladarse ni rotar

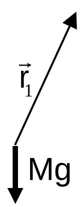
Se debe cumplir: $\sum \vec{F} = 0$ y $\sum \vec{M}_o = 0$

F_{roz} estática

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad N_S - Mg - mg = 0$$

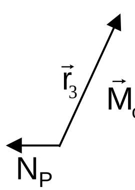
$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad F_{roz} - N_P = 0$$

F_{roz} estática $\leq \mu_{est}$ N



$$\vec{M}_o(\text{peso de la persona}) = \vec{r}_1 \times (-Mg\,\vec{j})$$

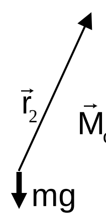
$$\vec{M}_o(\text{peso de la persona}) = -Mgd\,\text{sen}\,\phi\,\vec{k}$$



$$\vec{M}_o(N_p) = LN_P\cos\phi\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_o(N) = 0$$

$$\vec{M}_o(F_{roz}) = 0$$



$$\vec{M}_o(\text{peso de la escalera}) = -mg\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\phi\,\vec{k}$$

¿Cuál es el resultado final?

SI HAY MOVIMIENTO…

Hay que resolver las ecuaciones:

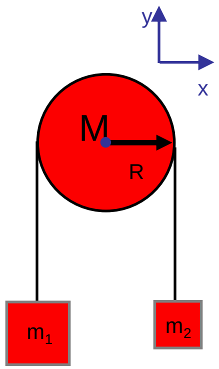
$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} \quad y \quad \sum \vec{M}_O = I \cdot \vec{\alpha}$$

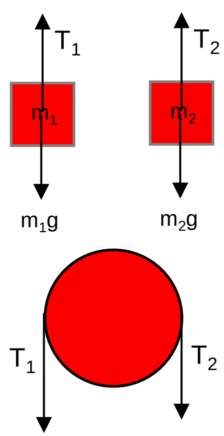
Recordamos los pasos a seguir:

1º dibujar el diagrama de cuerpo libre situando las fuerzas en su punto de aplicación
2º aplicar las ecuaciones de movimiento. Elegir en primer lugar un sistema de referencia adecuado.
3º determinar la relación entre la aceleración del centro de masas y la aceleración angular

Ejemplo: Una polea de masa M y radio R tiene colgados a sus extremos dos objetos de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$. ¿Qué aceleración tienen los bloques? ¿Qué aceleración angular tiene la polea?

¡OJO!: la polea no se considera una partícula, por tanto rota





Objeto 1 $\quad T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

Objeto 2 $\quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2$

Como $\quad a_2 = -a_1$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$
$$T_2 - m_2 g = -m_2 a_1$$

Objeto 3 $\quad RT_1 - RT_2 = I\alpha$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Como $\quad \alpha = \frac{a_1}{R}$

$$RT_1 - RT_2 = I \cdot \frac{a_1}{R}$$

Resolviendo $\quad a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$

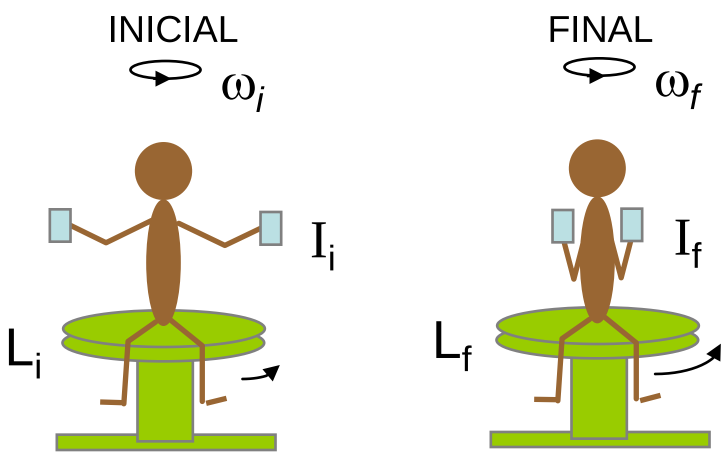
Es decir, m_1 baja, m_2 sube y la polea gira en sentido antihorario

CONSERVACIÓN DE L

$$\text{Si } \vec{M}_o^{\,exter} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{L}_o = cte$$

Si rota respecto a un eje principal $\vec{L}_{eje} = I_{eje} \cdot \vec{\omega}$

$$\vec{L}_{eje}(\text{inicial}) = \vec{L}_{eje}(\text{final})$$



No hay ninguna fuerza externa que realice momento, por tanto **L** se conserva

$$\vec{L}_{eje}(\text{inicial}) = I_{eje}^{inicial} \cdot \vec{\omega}_{ini}$$

$$\vec{L}_{eje}(\text{final}) = I_{eje}^{final} \cdot \vec{\omega}_{final}$$

$$I_{eje}^{inicial} > I_{eje}^{final}$$

Por tanto $\vec{\omega}_{ini} < \vec{\omega}_{final}$

ENERGÍA CINÉTICA

Si el sólido únicamente se traslada, la energía cinética es **DE TRASLACIÓN**:

$$E_{CIN}(\text{traslación}) = \frac{1}{2}M|v|^2_{CM}$$

Si el sólido únicamente rota respecto a un eje, la energía cinética es **DE ROTACIÓN:**

$$dE_{CIN}(\text{rotación}) = \frac{1}{2}dmR^2\omega^2 \qquad E_{CIN}(\text{rotación}) = \frac{1}{2}\int dmR^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\int dmR^2 = \frac{1}{2}I_{eje}\omega^2$$

Si el sólido se traslada y rota, el movimiento de cada parte del sólido sólo puede ser de rotación respecto al centro de masas, es decir:

$$E_{CIN}(\text{total}) = \frac{1}{2}M|v|^2_{CM} + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

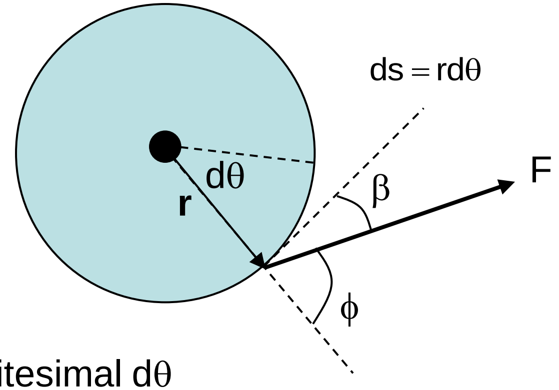
debido a su traslación

debido a su rotación respecto al centro de masas

TRABAJO DE ROTACIÓN

Consideramos un sólido que puede girar respecto a un eje. Si se le aplica la fuerza F:

$$\vec{M}_0(F) = \vec{r} \times \vec{F}$$



Para un desplazamiento angular infinitesimal $d\theta$

$$dW = r\,F\cos\beta\,d\theta$$

$$dW = r\,F\mathrm{sen}\,\Phi\,d\theta$$

$$dW = M\,d\theta$$

Trabajo de rotación $$W = \int_{\theta_{inicial}}^{\theta_{final}} M d\theta$$

Potencia de rotación $$P = \frac{dW}{dt}$$

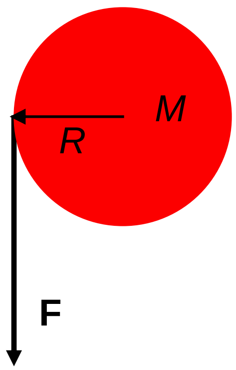
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$W = \Delta E_{cin}\,\textbf{(total)}$$

Sólo en rotación

$$W_{ROTACIÓN} = \Delta E_{cin}\,\textbf{(rotación)} = \frac{1}{2} I_{final}\omega^2_{final} - \frac{1}{2} I_{inicial}\omega^2_{inicial}$$

Una cuerda sin masa se enrolla 10 veces alrededor de un disco de masa M = 40 g y radio R=10 cm. El disco puede rotar sin rozamiento alrededor de un eje que pasa por su centro. Si se tira de la cuerda con una fuerza F=10N hasta que se desenrolla por completo, ¿qué velocidad final alcanza el disco?



Por conservación de la energía $W = \Delta E_{cin}\,\textbf{(total)}$

$$W = R \cdot F(\theta_{final} - \theta_{inicial}) = 0.1 \cdot 10 \cdot 20\pi = 62.8\ \text{J}$$

Como el disco solo rota (no se traslada) $W_{ROTACIÓN} = \frac{1}{2} I\omega^2_{final}$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} 0.04 \cdot 0.1^2 = 2 \times 10^{-4}\ \text{kgm}^2$$

$$\omega_{final} = \sqrt{\frac{2\,W_{ROTACIÓN}}{I}} = 792.5\ \text{rad/s}$$

MOVIMIENTO DE RODADURA

Habíamos visto que este movimiento puede estudiarse como:

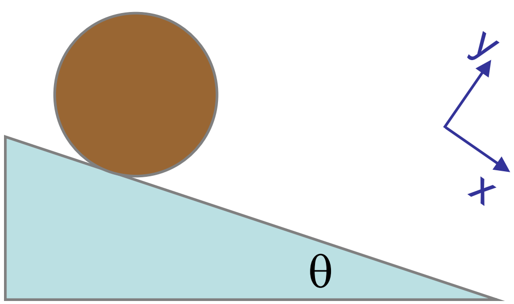
LA COMBINACIÓN DE UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN Y DE UN MOVIMIENTO DE ROTACIÓN RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS

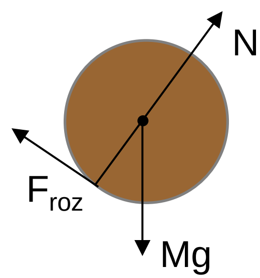
Por tanto necesitaremos resolver:

$$\sum \vec{F}^{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM} \qquad \vec{M}_{CM}^{exter} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

Además $\left|a_{CM}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|R\right|$

Una esfera de masa M y radio R rueda por el plano inclinado de la figura. Existe rozamiento. Analizar su movimiento





Eje x $Mg\,sen\theta - F_{roz\ estat} = Ma_{CM}$

Eje y $Mg\cos\theta - N = 0$

$$\left|M_{CM}\right| = F_{ROZ\ est} \cdot R = I_{CM} \cdot \alpha$$

$$\left|a_{CM}\right| = \left|\alpha\right| R$$

MOVIMIENTO DE RODADURA

$$F_{ROZ\ est} = \frac{I_{CM}\cdot\alpha}{R} = \frac{I_{CM}\cdot a_{CM}}{R^2}$$

$$Mg\,sen\theta - \frac{I_{CM}\cdot a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{Mg\,sen\theta}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)} \qquad \alpha = \frac{Mg\,sen\theta}{R\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Como se deduce de la expresión anterior no adquiere la misma aceleración un disco o una esfera porque no tienen el mismo momento de inercia

¿Qué energía mecánica tiene este objeto?
Cuando el objeto se encuentra a una distancia y del suelo, su energía mecánica vale:

$$E_{MEC} = \frac{1}{2}M\left|v_{CM}\right|^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + Mgy$$

Como en el movimiento de rodadura la fuerza de rozamiento es estática, no realiza trabajo y la E_{MEC} se conserva

$$E_{MEC} = cte$$