Energía del campo electrostático: Condensadores

1. Definición de condensador. Capacidad de un condensador. Cálculo de capacidades.

2. Asociación de condensadores.

3. Energía de un condensador. Energía del campo electrostático.

4. Teoría microscópica de dieléctricos. Dipolo eléctrico. Polarización.

5. Condensadores con dieléctrico. Constante dieléctrica. Campo de ruptura.

BIBLIOGRAFÍA:

-Tipler. "Física". Cap. 24, vol.2, 5 ed.. Reverté.
-Serway. "Física". Cap. 20 vol 2. 3 ed McGraw-Hill.

MIGUEL ÁNGEL MONGE
BEGOÑA SAVOINI

Departamento de Física

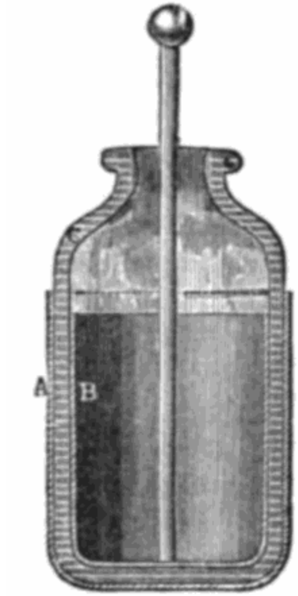
Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

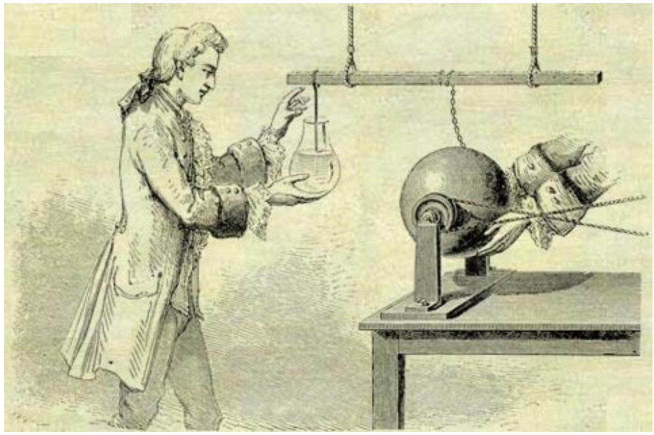
Introducción

En 1746, Pieter van Musschenbroek, que trabajaba en la Universidad de Leiden, efectuó una experiencia para comprobar si una botella llena de agua podía conservar cargas eléctricas.

Un año más tarde el británico William Watson, descubrió que aumentaba la cantidad de carga almacenada si envolvía la botella con una capa de estaño. Este fue el primer condensador.

Las botellas de Leyden eran utilizadas en demostraciones públicas sobre el poder de la electricidad. En ellas se producían descargas eléctricas capaces de matar pequeños ratones y pájaros.





(es.wikipedia.org/wiki/Botella_de_Leyden)

Introducción

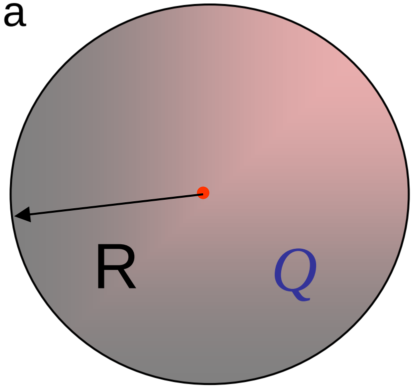
Algunos condensadores comerciales.

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photo-SMDcapacitors.jpg

Condensadores: capacidad

Sabemos que el potencial que adquiere una esfera de radio R cargada con Q es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R}$$



En general existe una relación entre *V* y la carga que adquiere un conductor cualquiera

$$V \propto Q$$

<u>Ejemplo</u>: Sean 3 esferas de radios $R_1<R_2<R_3$ que se cargan aplicándoles el mismo potencial *V*, por tanto

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_2} = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o R_3} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 4\pi\varepsilon_o R_1 V < Q_2 = 4\pi\varepsilon_o R_2 V < Q_3 = 4\pi\varepsilon_o R_3 V$$

$$\frac{Q_1}{V} = C_1 = 4\pi\varepsilon_o R_1 < \frac{Q_2}{V} = C_2 = 4\pi\varepsilon_o R_2 < \frac{Q_3}{V} = C_3 = 4\pi\varepsilon_o R_3$$

- Para un potencial dado, el radio de la esfera determina la cantidad de carga que adquiere la esfera.
- En general, la razón Q/V es un parámetro geométrico del conductor.
- A esta razón Q/V se le llama capacidad del conductor $\rightarrow$ ¿Por qué?

Condensadores: capacidad

Capacidad de un conductor:

Si uno tiene un recipiente de volumen v que lo llena con cierta masa *m* de un fluido de densidad determinada ρ, dice que la capacidad del recipiente es su volumen:

$$\upsilon = \frac{m}{\rho} \quad \longrightarrow$$

Esto es el volumen, que obviamente es un parámetro geométrico del recipiente.

Análogamente en el caso de una esfera con una carga eléctrica *Q* a la razón *Q/V,* que es un parámetro geométrico, la llamamos ***capacidad*** que tiene la esfera, o un conductor particular, de adquirir carga cuando se le aplica un potencial eléctrico *V*

Capacidad de una esfera de radio R:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R$$

- Conocida la capacidad *C* de un cuerpo conductor, o sistema de conductores, la carga que el sistema acumula cuando se aplica un potencial V dado es : ***Q=CV.***
- *C* representa la “capacidad” que tiene el sistema para almacenar carga, o energía electrostática.
- La capacidad se mide en faradios $\rightarrow$

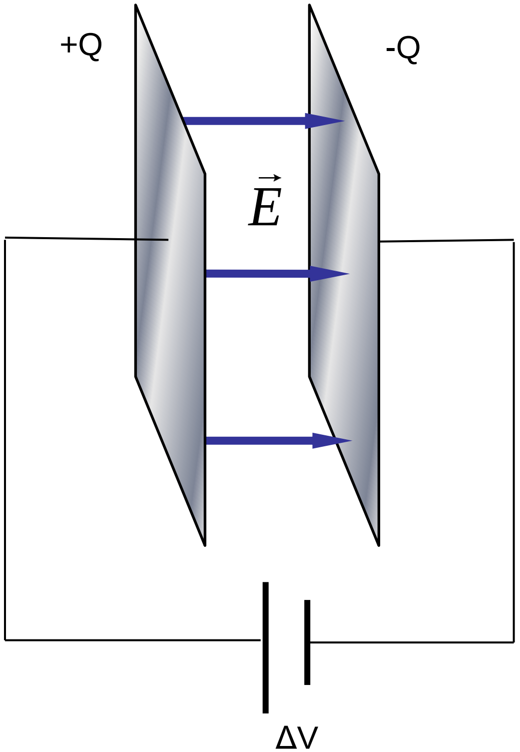
$$[C] <> \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{F} \;\; \text{(Faradio)}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la capacidad de la Tierra?

Condensadores: capacidad

Definición: Un condensador es cualquier dispositivo que permite almacenar carga eléctrica.

Utilidad: Almacenamiento de carga y energía en los circuitos. La propiedad que caracteriza este almacenamiento es la **Capacidad Eléctrica**.



Construcción de un condensador:

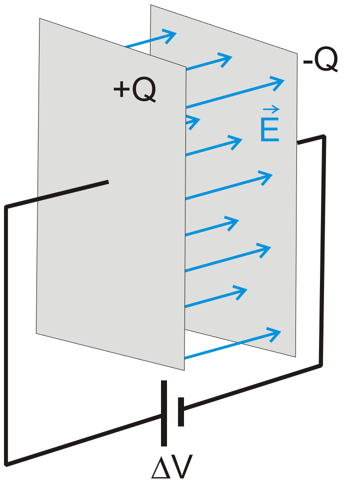
Dos conductores aislados (**placas**) de forma arbitraria, con cargas +Q y –Q.

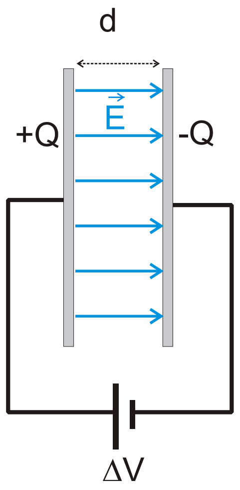
Un condensador se caracteriza por la carga almacenada. Esta carga depende de la disposición de las placas del condensador y la diferencia de potencial entre ellas.

Condensadores: capacidad

Un condensador se carga conectando las dos placas a los terminales de una batería

De esta forma, la carga eléctrica se almacenan en las placas hasta que se alcanza el equilibrio electrostático. Así, la diferencia de potencial entre las placas es la misma que entre los terminales de la batería.





La relación ente la carga y el potencial es una característica propia de cada condensador, por lo que se define la **Capacidad** del condensador como

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Unidades en el S.I.: **Faradio (F)**

La capacidad es una propiedad puramente geométrica.

Condensadores: capacidad

Para calcular la capacidad de un condensador se puede seguir el siguiente procedimiento:

1.- Se calcula la diferencia de potencial entre las dos piezas metálicas que forman el condensador.

1.1- Lo mas sencillo suele ser calcular primero el campo eléctrico en el condensador aplicando la ley de Gauss.

1.2- Calcular la diferencia de potencial entre las placas a partir del campo eléctrico calculado como:

$$\Delta V = V_A - V_B = -\int_{Placa\ A}^{Placa\ B} \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

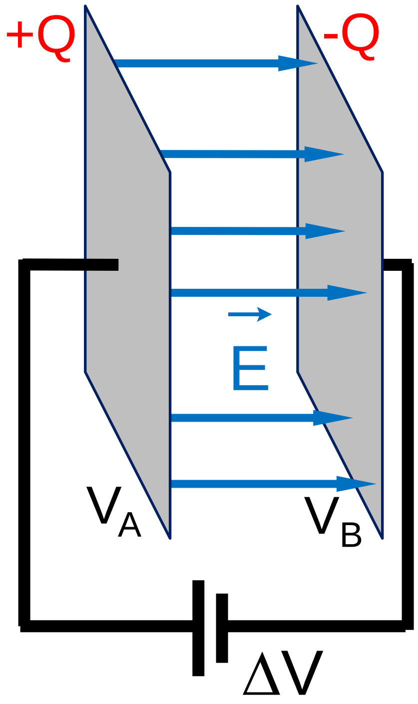
2.- Se calcula la carga total Q de una de las placas.

3.- La razón entre Q/ΔV es la capacidad C:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Condensadores: capacidad

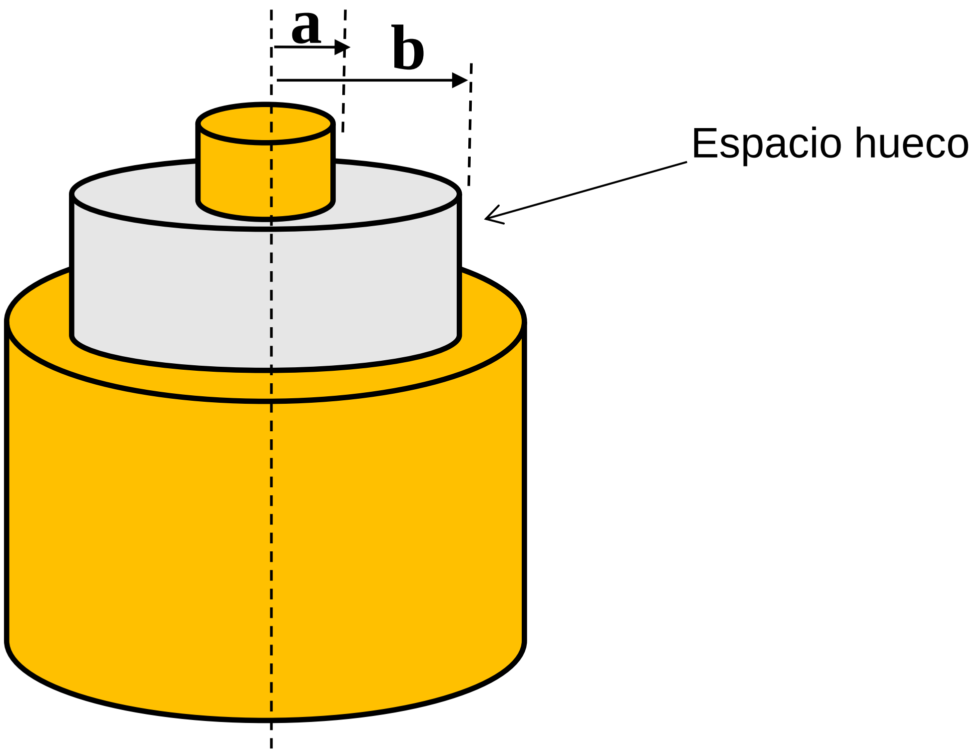
<u>Ejemplo:</u> *Calcule la capacidad de un condensador planoparalelo formado por dos placas metálicas de superficie S y separadas una distancia d*.



Solución en los problemas. <u>Intenta solucionarlo sin mirar el resultado</u>

Condensadores: capacidad

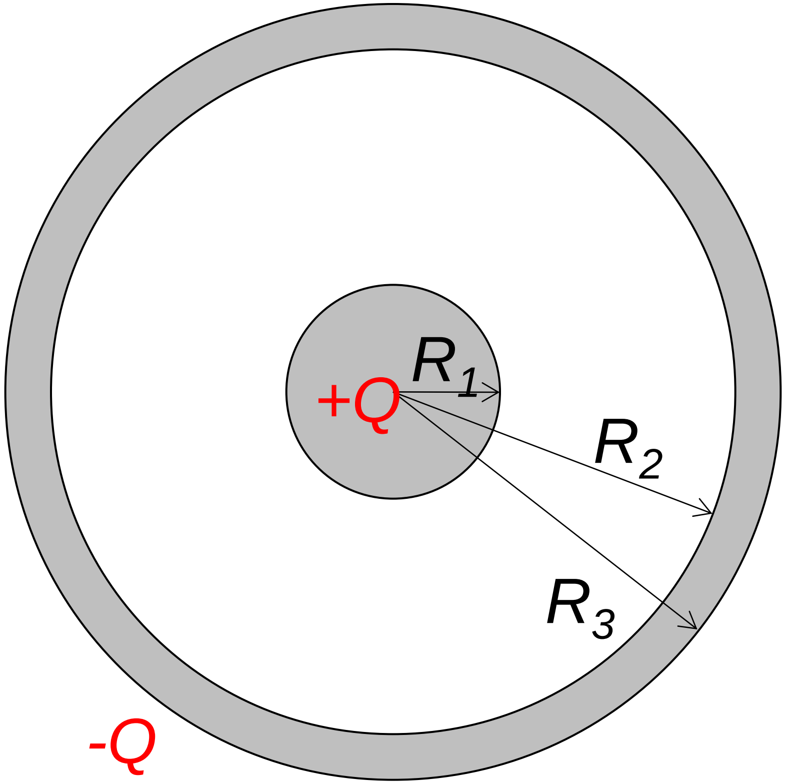
<u>Ejemplo</u>: *Un condensador cilíndrico formado por dos cilindros metálicos concéntricos de radios a y b, respectivamente, y longitud l, se cargan a una diferencia de potencial ΔV. Calcular su capacidad*



Solución en los problemas. <u>Intenta solucionarlo sin mirar el resultado</u>

Condensadores: capacidad

Ejemplo: *Un condensador esférico formado por dos esferas metálicas concéntricas de radios R1 y R2, respectivamente, se cargan a una diferencia de potencial ΔV. Calcular su capacidad*



Solución en los problemas. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

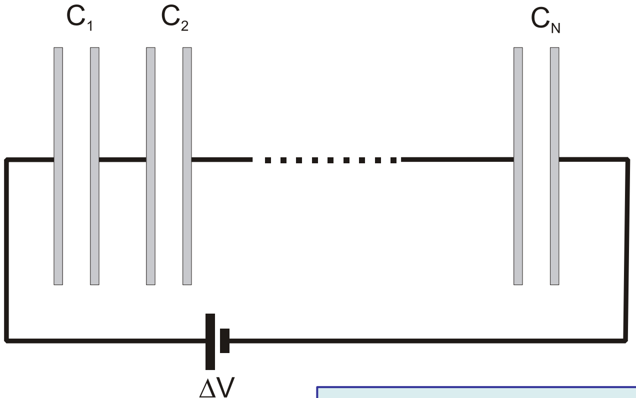
Asociación de condensadores.

Los condensadores suelen encontrarse formando circuitos. Estos circuitos están formados por condensadores dispuestos de formas diversas.

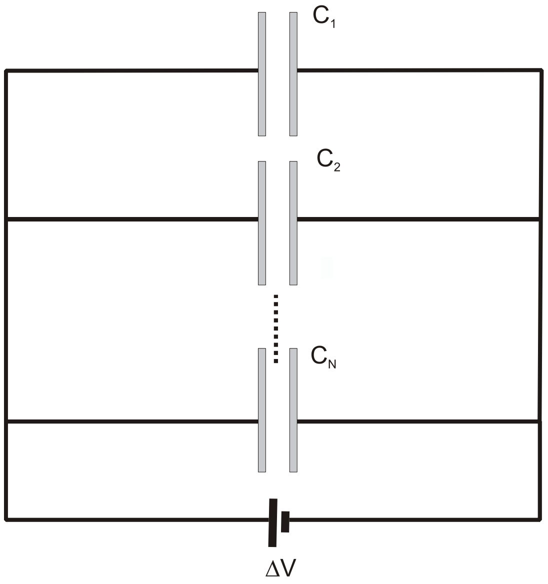
Se denomina capacidad equivalente de un circuito, a la capacidad que tendría que tener un único condensador para que almacene la misma carga que el circuito de condensadores conectado a la misma diferencia de potencial.

$$C_{eq} = \frac{Q_{Total}}{\Delta V}$$

Las forma más sencilla de asociar condensadores son: serie y paralelo:



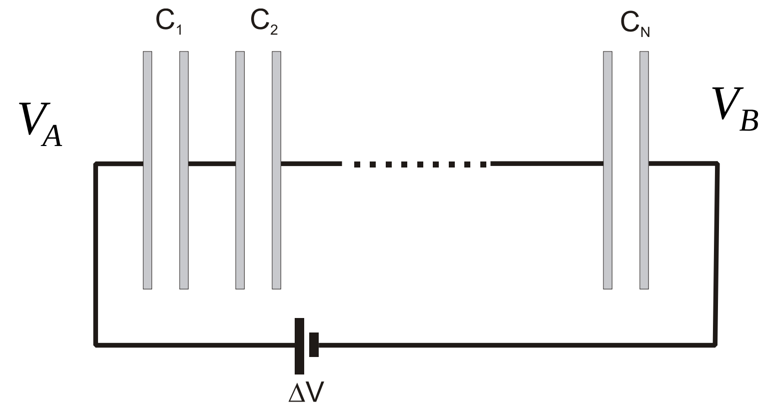
Condensadores en Serie



Condensadores en Paralelo

Asociación de condensadores.

Asociación de condensadores en serie.



Todos los condensadores tienen igual carga pero la diferencia de potencial es diferente en cada uno de ellos. La capacidad equivalente es:

$$\Delta V = V_A - V_B$$

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots \Delta V_n = \sum_i \Delta V_i \\ \Delta V_i = \dfrac{Q_i}{C_i} = \dfrac{Q}{C_i} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{AB} = \dfrac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \sum_i \dfrac{Q}{C_i} \\ Q_{eq} = Q \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

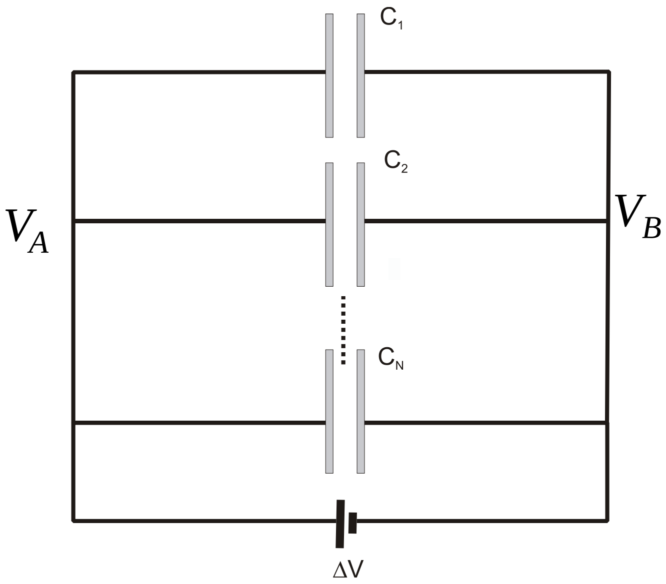
En general: Todos los condensadores tienen igual carga pero distintos potenciales.

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_1^n \frac{1}{C_i}}$$

Asociación de condensadores.

Asociación de condensadores en serie.

Todos los condensadores tienen la misma diferencia de potencial pero la carga es distinta. La capacidad equivalente es:



$\Delta V = V_A - V_B$

$$C_{eq} = \frac{Q_{tot}}{V_{AB}} = \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n}{V_{AB}} =$$

$$= \sum_i \frac{Q_i}{V_{AB}} \quad \rightarrow C_{eq} = \sum_i C_i$$

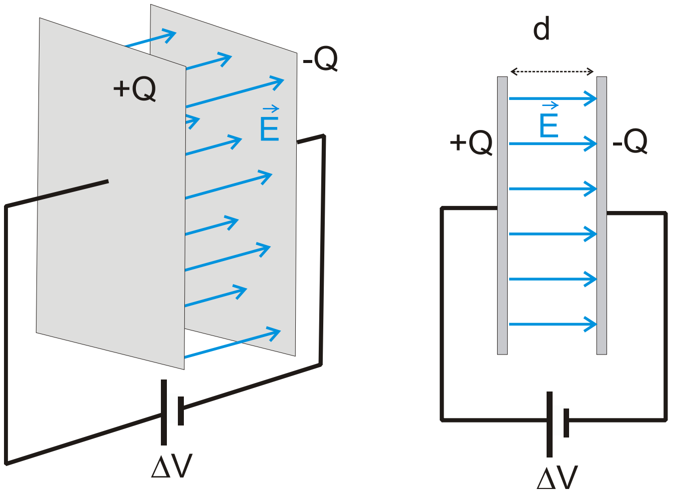
En general: Todos los condensadores tienen igual diferencia de potencial pero carga distinta.

$$\boxed{C_{eq} = \sum_1^n C_i}$$

Energía almacenada en un condensador.

Cuando se carga un condensador con una batería, ésta realiza un trabajo al transportar la carga eléctrica de una placa a otra. Este trabajo que realiza la batería queda almacenado en forma de energía potencial en el condensador, y coincide con la **energía eléctrica almacenada en el condensador**. La energía almacenada se recupera cuando se descarga el condensador.

El trabajo para mover una carga *dq* de un punto a otro entre los que hay una diferencia de potencial ΔV es:



$W = q\Delta V \Rightarrow$ si aumentamos la carga en una carga

muy pequeña dq: $dW = \Delta V dq = \dfrac{q}{C} dq$

Ya que ΔV=q/C. Por tanto para cargar el condensador de cero a una carga Q se realiza un trabajo.

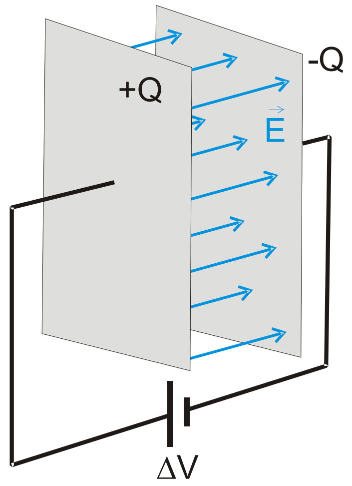
$$\boxed{W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Nos falta saber dónde está almacenada dicha energía.

Energía del campo eléctrico

Este trabajo realizado coincide con la energía potencial que queda almacenada en el condensador:

$$\boxed{W = U \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$



que aplicando ΔV=q/C se puede expresar como:

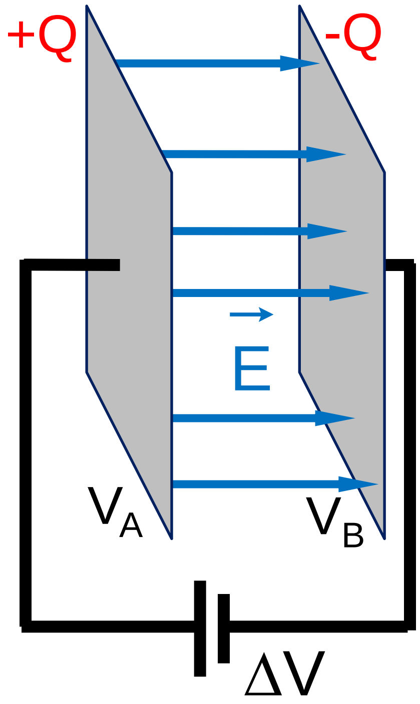
$$\boxed{U = \frac{1}{2}Q\Delta V \quad \text{y como} \quad U = \frac{1}{2}C\Delta V^2}$$

Pero ¿dónde se encuentra almacenada esa energía?

¿.....?

Energía del campo eléctrico

Apliquemos el resultado anterior a un condensador planoparalelo. Sabemos que en este caso el campo eléctrico y la capacidad del condensador es:



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{i} = \frac{Q}{\varepsilon_o\, S}\vec{i}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Q\, d / \varepsilon_o\, S} = \frac{\varepsilon_o\, S}{\mathrm{d}}$$

Con lo que la energía almacenada es:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o d}{S}E^2 S^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 (Sd)$$

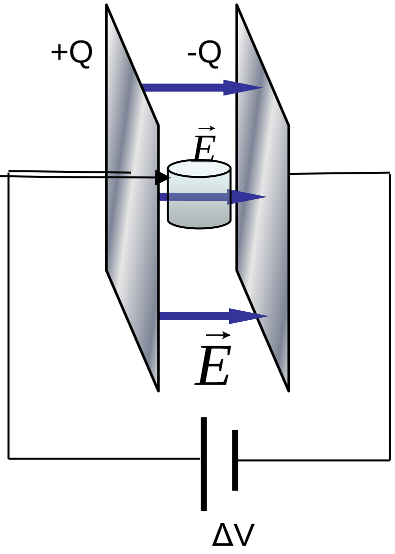
Fijarse que S×d es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador. Luego podemos definir la **densidad de energía almacenada** como:

$$\boxed{u = \frac{U}{Volumen} = \frac{\frac{1}{2}Q^2 / C}{Volumen} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$$

Energía del campo eléctrico

El resultado es sorprendente. Solo depende del campo eléctrico. Por tanto podemos decir que en el espacio comprendido entre las placas, el campo eléctrico (que es lo único que hay) almacena una cantidad de energía por unidad de volumen que es:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$$



Se puede demostrar que este resultado es general e independiente de cómo sea la naturaleza u origen del campo eléctrico. Por tanto, ***la energía que un campo eléctrico almacena por unidad de volumen (densidad de energía del campo eléctrico) es:***

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

Y por tanto, la energía total almacenada en un volumen dado es:

$$U = \int u\, dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV \Rightarrow \text{ Si } u \text{ es cte entonces } U = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 \times Volumen$$