Distribuciones continuas de carga: Ley de Gauss

- Distribuciones continuas de carga.
- Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga.
- Flujo del campo eléctrico.
- Ley de Gauss.
- Aplicaciones de la ley de Gauss.

<u>BIBLIOGRAFÍA:</u>

-Tipler. "Física". Cap. 22. Reverté.
-Serway. "Física". Cap. 19. McGraw-Hill.

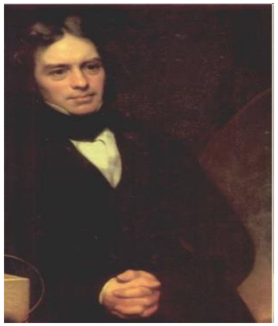
Miguel Ángel Monge
Begoña Savoini

Departamento de Física

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Introducción

Tras el descubrimiento de la ley de Coulomb, la nueva rama de la Física se desarrollo rápidamente.



- Michael Faraday (1791-1867) inicio la idea del campo eléctrico y descubrió la inducción electromagnética.

- James Clerk Maxwell (1831-1979) desarrolló la teoría clásica del electromagnetismo tal y como se encuentra actualmente establecida. Uno de los mayores genios teóricos de la historia.

- Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855): sus desarrollos en matemáticas permitieron formalizar las leyes del electromagnetismo.

commons.wikimedia.org/wiki/File:Michael_Faraday_001.jpg
en.wikipedia.org/wiki/File:James_Clerk_Maxwell.png
en.wikipedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Distribuciones continuas de carga

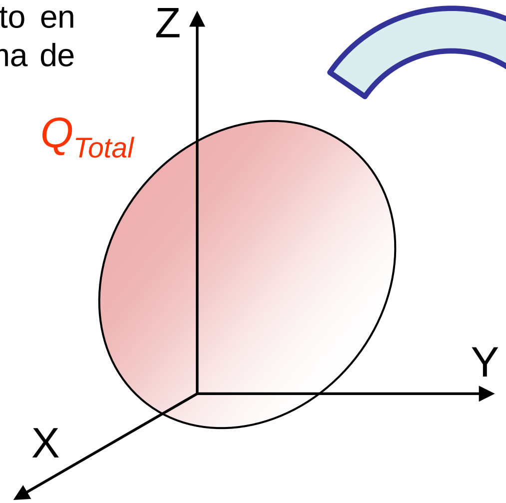
En nuestro mundo cotidiano, los objetos no son puntuales y por tanto las cargas eléctricas se encuentran repartidas por la superficie o por el volumen de los objetos cotidianos

Una forma de calcular la carga es dividir nuestro objeto en trocitos pequeños, y calcular la carga total como la suma de la carga en cada trozo Δq_i.

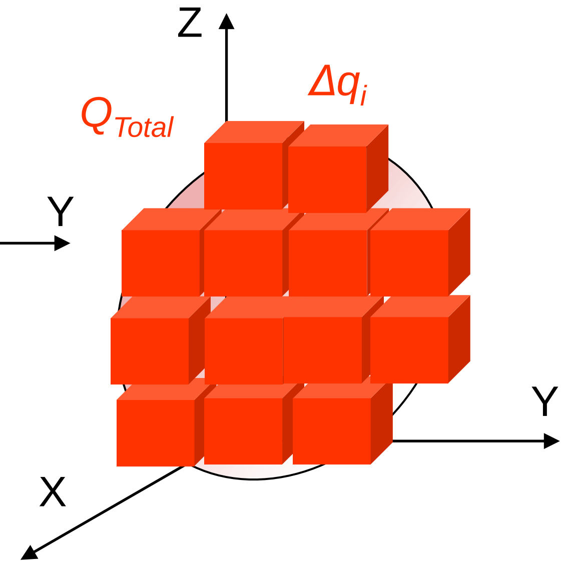
$$Q = \sum_{i=1}^{N} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \Delta V$$

Definición de densidad volumétrica de carga en un punto:
Es la carga por unidad de volumen:

$$\rho_i = \frac{\Delta q_i}{\Delta V} \quad \rightarrow \quad \Delta q_i = \rho_i \Delta V$$



Descomponemos la distribución de carga en trozos, cada trozo tiene una carga Δq_i.



Este cálculo es tanto mejor cuanto más pequeños son los trozos. Cuando los trozos son tan pequeños que su tamaño es despreciable, decimos que la carga en cada trozo es un **diferencial** de carga *dq*. El número de trozos se hace muy grande y el sumatorio tiende infinito, ya que hay muchísimos trozos, transformándose el sumatorio en una integral de volumen:

$$Q = \lim \sum_{i=1}^{N\to\infty} \Delta q_i = \int_V dq = \int_V \rho\, dV$$

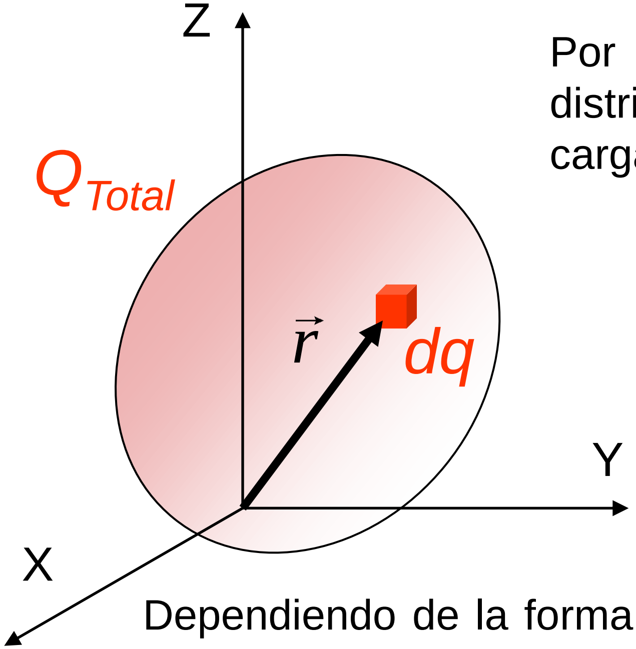
$$\rho(x,y,z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \rightarrow \quad dq = \rho\, dV$$

$$\boxed{Q = \int_V dq}$$

La integral se realiza en el volumen V donde hay carga eléctrica.

Miguel Ángel Monge / Begoña Savoini

Distribuciones continuas de carga



Por tanto, para calcular la carga total dividimos la distribución en pequeños elementos diferenciales de carga, *dq*, de forma que la carga total es la integral:

$$\boxed{Q = \int_{v} dq}$$

Dependiendo de la forma de la distribución (en una línea, volumen o superficie) se definen las siguientes distribuciones de carga

Lineal

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Superficial

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

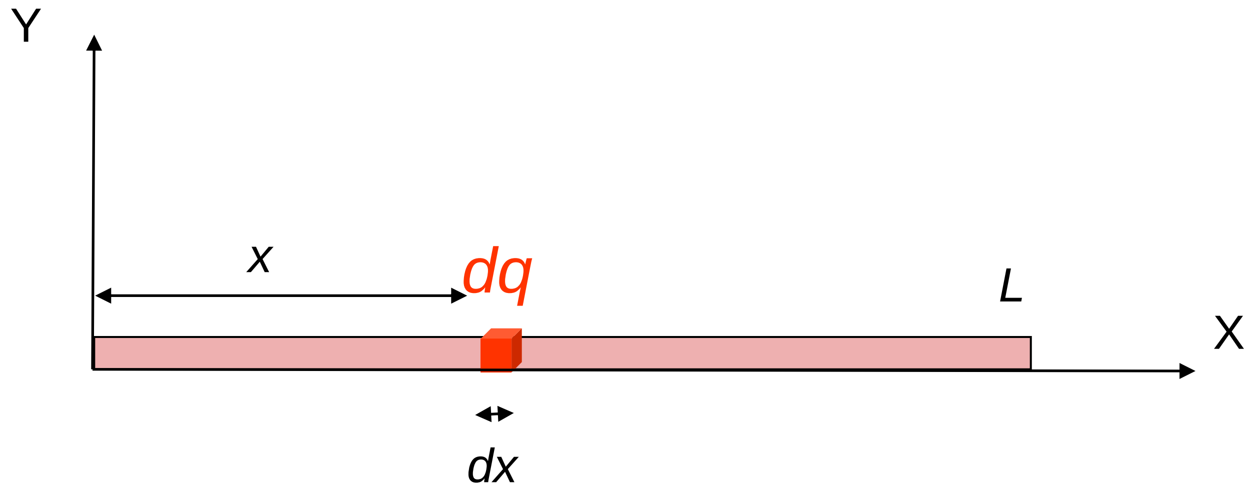
Volumétrica

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

Distribuciones continuas de carga

Ejemplo 1:

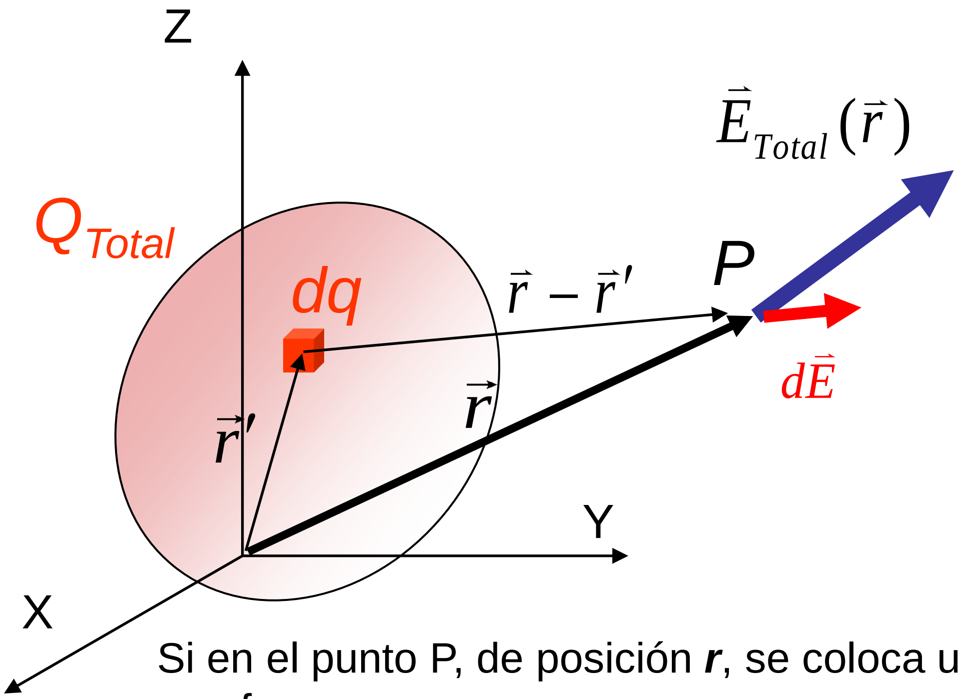
Calcule la carga eléctrica total de una línea de longitud L cargada con una densidad de carga de *3x* C/m.



Solución al final de esta presentación. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

El campo eléctrico creado por una distribución continua de carga será como el de una discreta, aplicando el principio de superposición. Pero el sumatorio se transforma en una integral. Se calcula integrando vectorialmente los campos eléctricos creados por cada una de las cargas diferenciales, *dq*, que componen la distribución de carga en el punto ***r*** donde se desea calcular ***E***.



$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\,\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}\,'}}$$

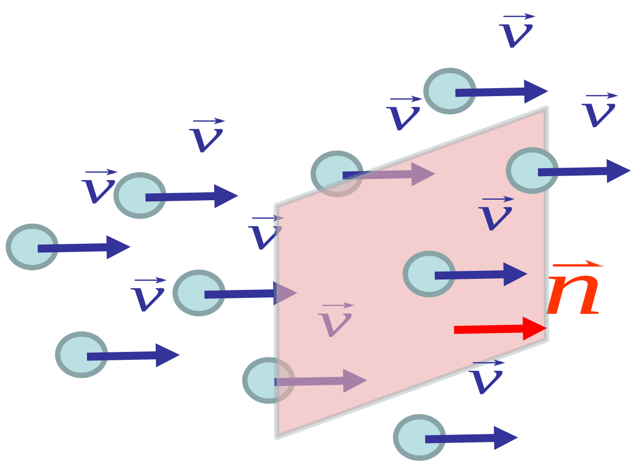
Los límites de integración deben ser tales que ***r'*** recorra todos los puntos del espacio donde hay carga eléctrica.

Si en el punto P, de posición ***r***, se coloca una carga puntual *q*, esta experimentará una fuerza:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})}$$

Flujo del campo eléctrico por una superficie

¿Qué es un flujo? Para entender que es un flujo comenzaremos con un ejemplo sencillo. Imagina un rio por el que circula una corriente de agua. Las moléculas de agua se mueven a una velocidad *v* en la dirección de la corriente del rio. Si un pescador se encuentra en el rio pescando con una red se podría preguntar: ¿cuánta agua atraviesa la red?



Eso es lo mismo que calcular el flujo de agua a través de la red. Si la red tiene una superficie *S*, y todas las moléculas de agua se mueven con igual velocidad *v* y su velocidad es perpendicular a lar superficie de la red (es decir *v* es paralela a la normal *n* a la superficie de la red), el número de moléculas que pasan por la red por segundo es:

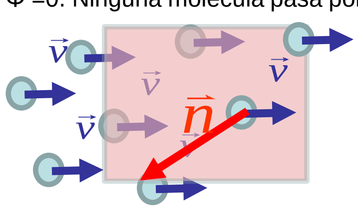
$$\Phi = \int_S N\vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_S N\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{v}\vec{n}}\right)dS = NvS$$

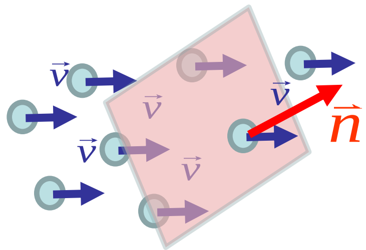
Donde *N* es el número de moléculas por metro cubico: moléculas/m^3.

Fijarse en que hay que tener en cuenta el ángulo que forma la normal a la superficie de la red, ***n***, con la velocidad de las moléculas para calcular el flujo.

Si *n* es perpendicular a *v*, el flujo

Φ =0. Ninguna molécula pasa por la red.





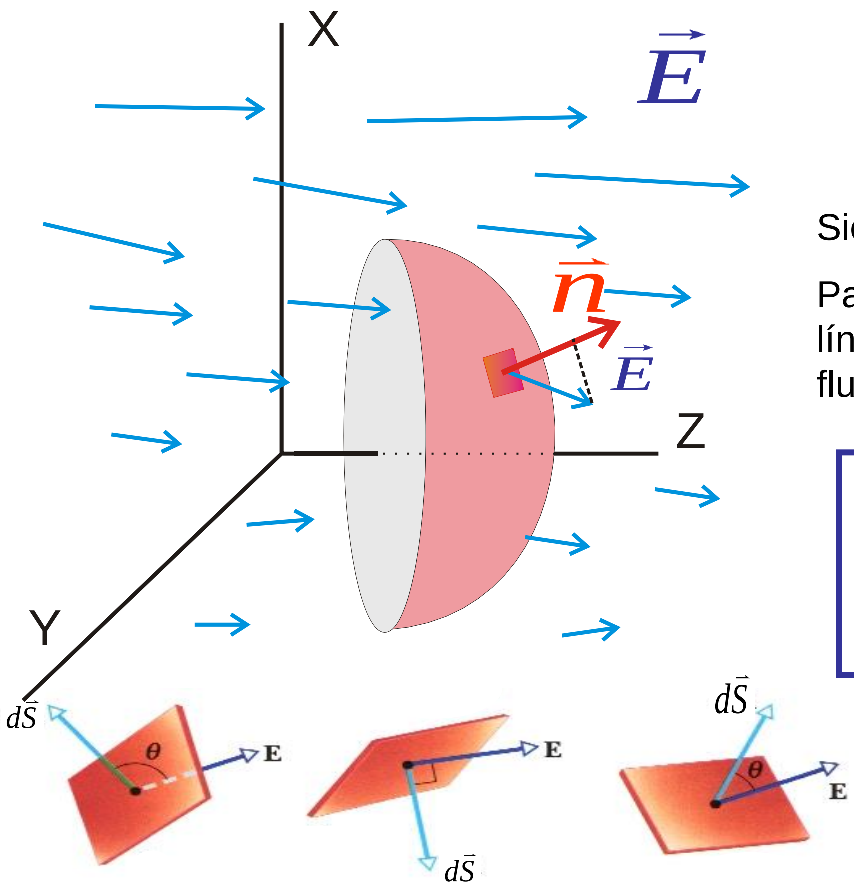
Si *n* forma un ángulo α con *v*, el flujo es

Φ =*NvS* cos (α). El flujo es menor que en el primer caso

Miguel Ángel Monge / Begoña Savoini

Flujo del campo eléctrico por una superficie

El flujo eléctrico da idea de la *cantidad* de campo eléctrico (*se puede imaginar como si las líneas o vectores del campo fluyeran como un líquido a través de la superficie*) que atraviesa cierta superficie. Si la superficie considerada encierra una carga, el número de líneas de campo eléctrico que atraviesa dicha superficie es proporcional a la carga neta encerrada.



$$\Phi = \int_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left|\vec{E}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{E}\vec{n}}\right) dS$$

Siendo ***n*** un vector unitario perpendicular a la superficie.

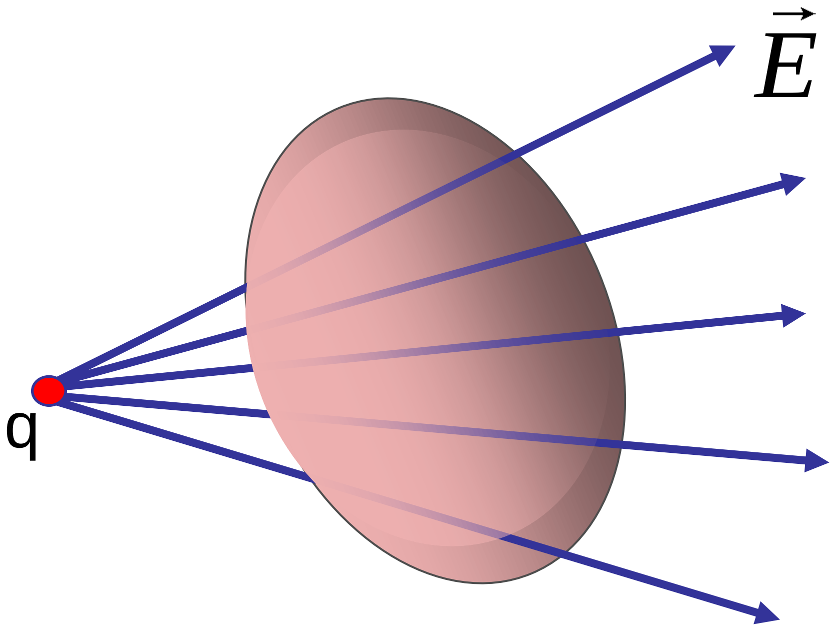
Para una superficie cerrada el flujo será negativo si la línea de campo entra y positivo si sale. En general, el flujo neto para una superficie cerrada será:

$$\boxed{\Phi = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \left|\vec{E}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{E}\vec{n}}\right) dS}$$

En el S.I. el flujo se mide en se mide en: $[\Phi]$=N m^2/C

Flujo del campo eléctrico por una superficie

Imaginemos el campo creado por una carga puntual *q* próxima a una superficie cerrada de forma arbitraria. En este caso el número neto de líneas de campo que atraviesa la superficie es cero (entran el mismo número de líneas que salen), por lo tanto:



$$\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ya que toda línea de campo que entra en la superficie, tiene que salir al no existir cargas eléctricas en su interior.

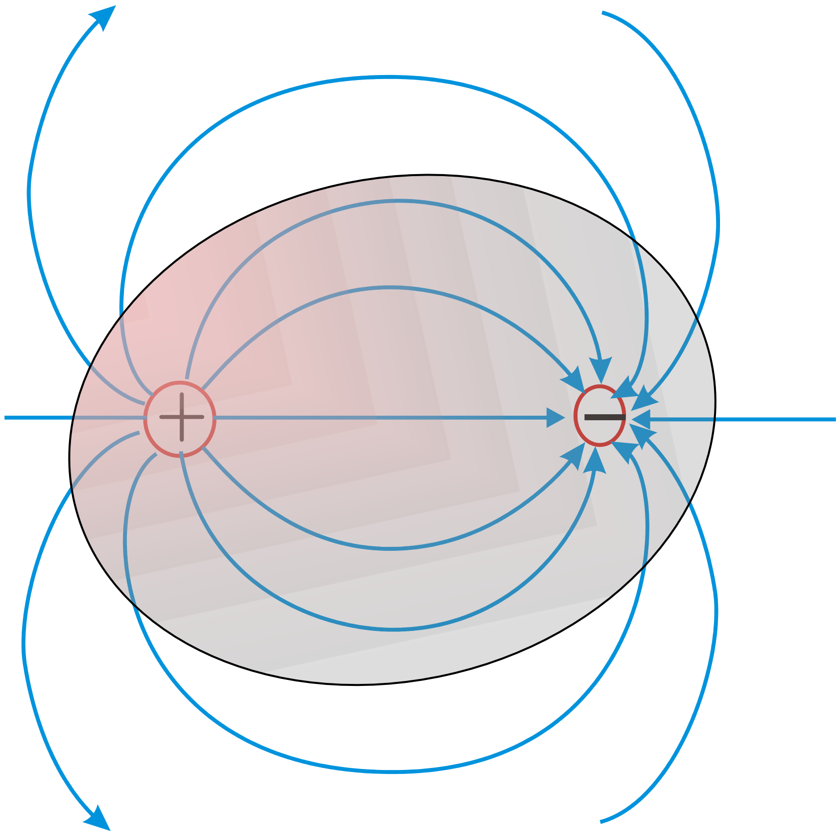
<u>El flujo del campo eléctrico a través de una superficie que no encierra carga es siempre nulo.</u>

Flujo del campo eléctrico por una superficie

Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria *S*. La carga total encerrada es cero.

El flujo eléctrico total es cero ya que entran tantas líneas de campo como salen

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

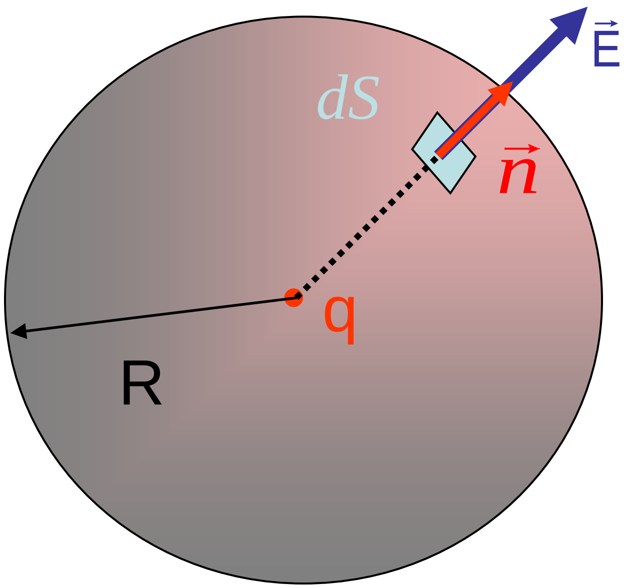


Fijarse en que la carga eléctrica neta en el interior de la superficie es Q=0.

¿Qué sucederá en un caso general?

Flujo del campo eléctrico por una superficie

Ejemplo 2: *Una carga puntual q está situada en el centro de una superficie esférica de radio R. Calcule el flujo neto del campo eléctrico a través de dicha superficie.*



$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \left|\vec{E}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{E}\vec{n}}\right) dS}$$

Como E y n son paralelos forman un ángulo de 0 grados

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \left|\vec{E}(\vec{r})\right| \cdot \cos(0) dS =$$

$$= \left|\vec{E}(R)\right| \oint dS = \left|\vec{E}(R)\right| 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

El resultado es independiente del radio de la esfera:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss establece una relación general entre el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga encerrada por ella.

Ley de Gauss: *El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la carga neta que se encuentre dentro de dicha superficie dividida por la permitividad eléctrica.*

$$\boxed{\Phi = \oint_{S_{cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{Total en el interior de S}}}{\varepsilon_o}}$$

A la superficie **S** se le denomina superficie gaussiana (solo es un nombre).

De forma mas explicita:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \cos\left(\vec{E}\vec{n}\right) dS = \frac{Q_{\text{Total en el interior de S}}}{\varepsilon_o}$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss se cumple siempre. Se puede aplicar de forma sencilla al calculo del campo eléctrico en problemas con gran simetría.

Procedimiento para aplicar el teorema de Gauss en casos sencillos

Se debe elegir una superficie que tenga la simetría adecuada para la distribución de carga cuyo campo E se desea calcular.
La superficie debe cumplir

$$\left.\begin{cases} \vec{E} \text{ es } \left\{ \begin{matrix} \text{Paralelo} \\ \text{Perpendicular} \end{matrix} \right\} \text{ a } \vec{n} \\ \vec{E} \text{ es constante en módulo} \end{cases}\right\} \text{ en todos los puntos de la superficie}$$

De esta forma se cumple que:

$$\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \left|\vec{E}\right| \cdot \cos\left(\vec{E}\vec{n}\right) ds = \begin{cases} = 0 \quad \text{si es paralelo a la superficie gaussiana} \\ = \left|\vec{E}\right| S \quad \text{si es perpendicular a la superficie gaussiana} \end{cases}$$

Por lo tanto

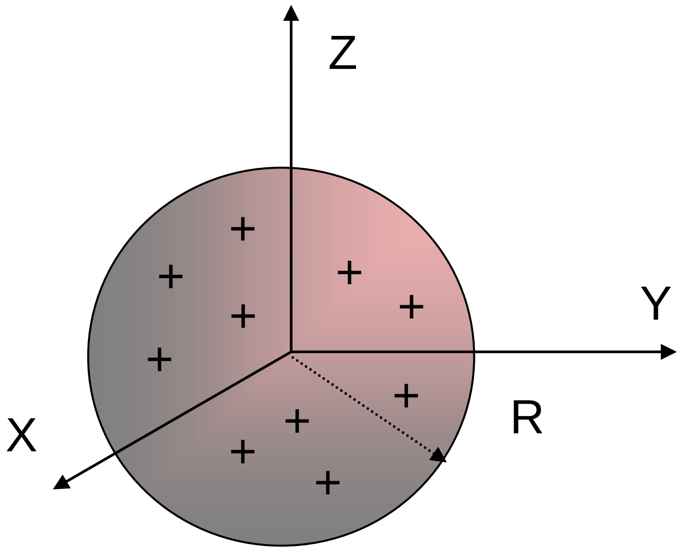
$$\boxed{\left|\vec{E}\right| \ S = \frac{Q_{\text{Total en el interior de S}}}{\varepsilon_o}}$$

S es el área de la superficie gaussiana donde hay flujo de campo ***E*** constante en dicha superficie.

Ley de Gauss: Aplicaciones

Ejemplo 3:

Calcule el campo eléctrico producido por una esfera cargada uniformemente de radio R con una carga Q distribuida en todo el volumen de la esfera.

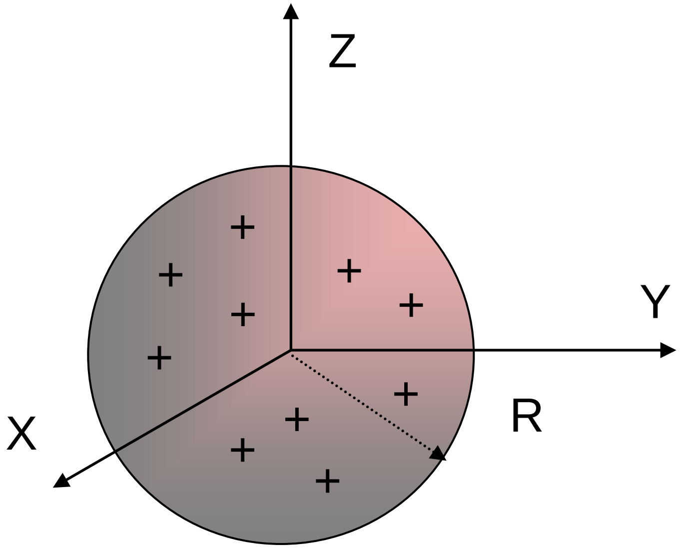


Solución al final de esta presentación. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

Ley de Gauss: Aplicaciones

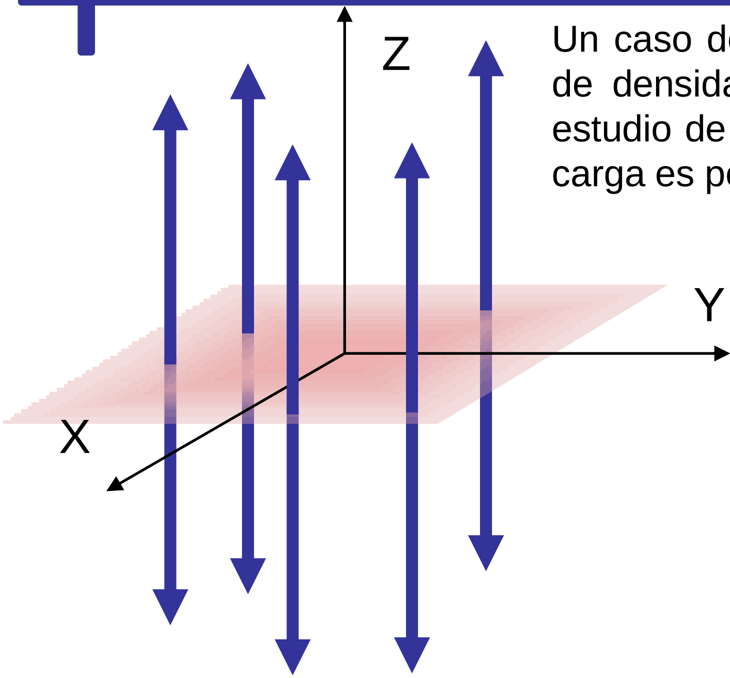
Ejemplo 4:

Calcule el campo eléctrico producido por un casquete esférico de radio R (la carga solo esta en la superficie) cargado uniformemente con una carga Q distribuida en solamente en la superficie de la esfera.



Solución al final de esta presentación. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

Ley de Gauss: Aplicaciones



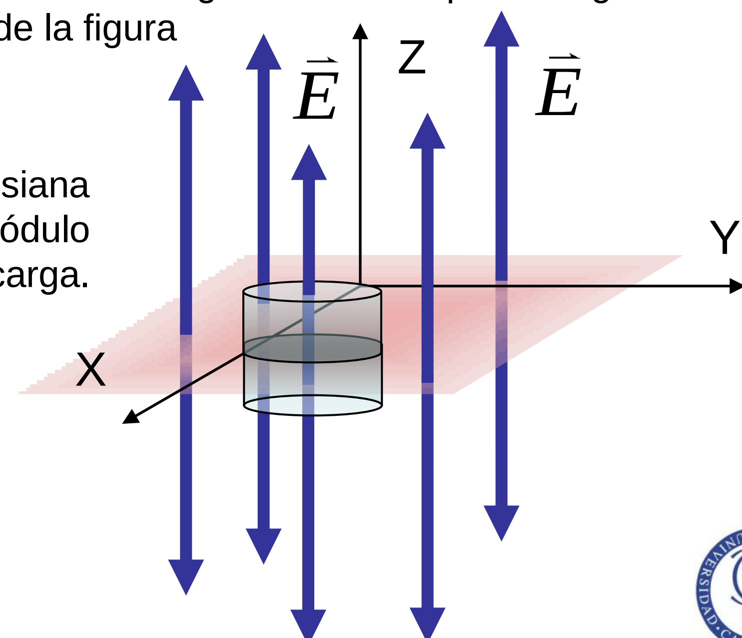
Un caso de gran interés es el campo eléctrico producido por un plano infinito de densidad de carga σ, como el de la figura. Este caso será útil para el estudio de dispositivos eléctricos como el condensador. Si suponemos que la carga es positiva, el campo eléctrico por simetría es el de la figura.

Para poder aplicar el teorema de Gauss de forma sencilla se debe cumplir:

1) el campo eléctrico ***E*** es paralelo/perpendicular a la normal ***n*** de la superficie en cada punto.

2) El módulo de E es constante sobre la superficie.

Para cumplir lo anterior elegimos una superficie gaussiana cilíndrica como la de la figura

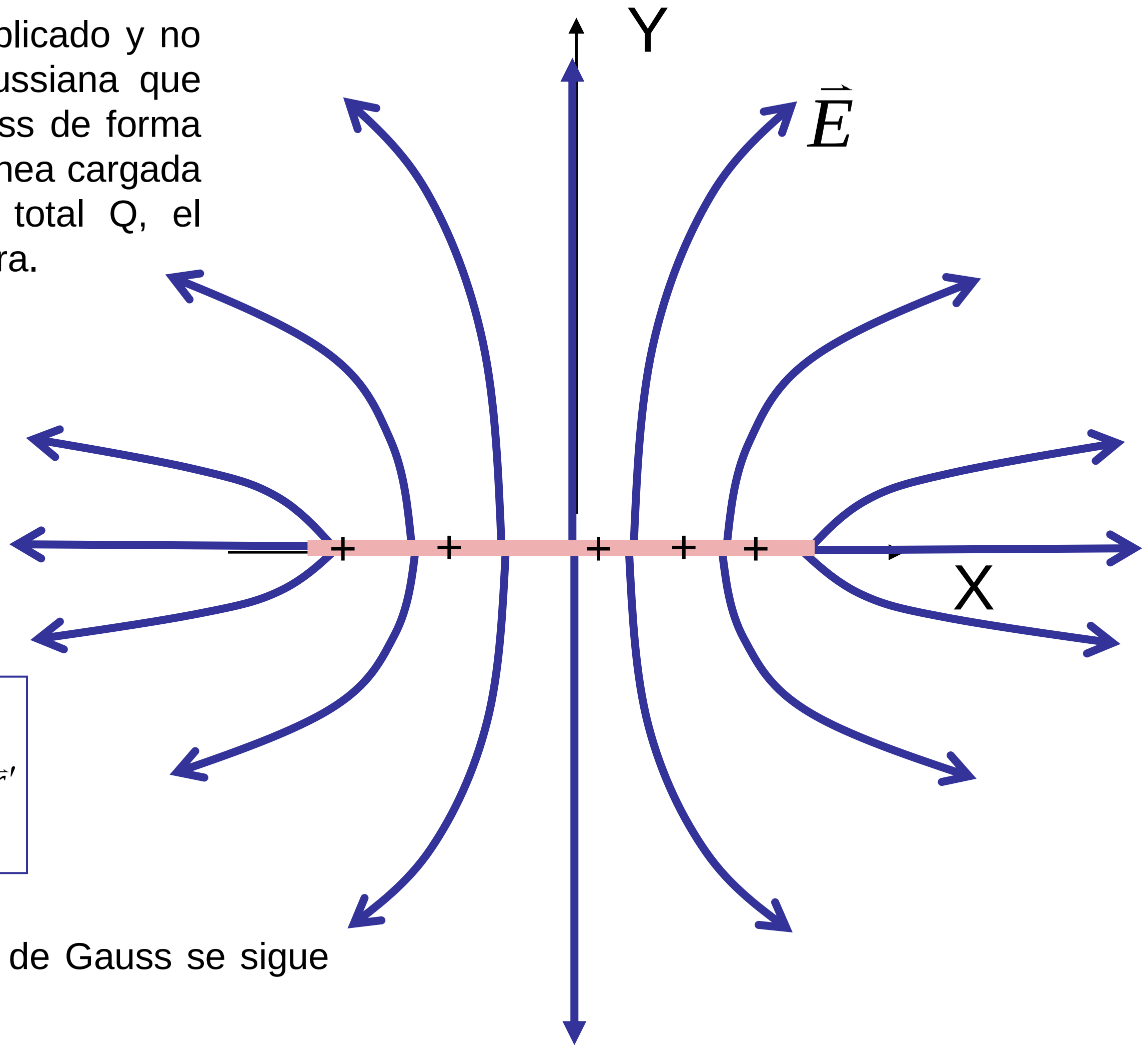


Aplicamos el teorema de Gauss a la superficie gaussiana cilíndrica. El resultado es que el campo eléctrico es de módulo constante y perpendicular al plano de la distribución de carga. Su valor es:

$$\boxed{\left|\vec{E}(\vec{r})\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Ley de Gauss: Aplicaciones

En muchos casos el campo E es complicado y no sabemos encontrar una superficie gaussiana que nos permita aplicar el teorema de Gauss de forma sencilla. Por ejemplo, si tenemos una línea cargada positivamente de longitud L y carga total Q, el campo eléctrico tiene la forma de la figura.



En un caso como este, para calcular el campo eléctrico deberemos solucionar la integral con que lo definimos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\ \vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}\,'}$$

Aunque, como ya hemos dicho, la ley de Gauss se sigue cumpliendo.