Potencial eléctrico

- Introducción.
- Trabajo y energía potencial en el campo eléctrico
- Potencial eléctrico. Gradiente.
- Potencial de una carga puntual: Principio de superposición
- Potencial eléctrico de distribuciones de carga eléctrica.
- Superficies equipotenciales.

BIBLIOGRAFÍA:

-Tipler. "Física". Cap. 23. Reverté.

-Serway. "Física". Cap. 20. McGraw-Hill.

Miguel Ángel Monge
Begoña Savoini

Departamento de Física

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

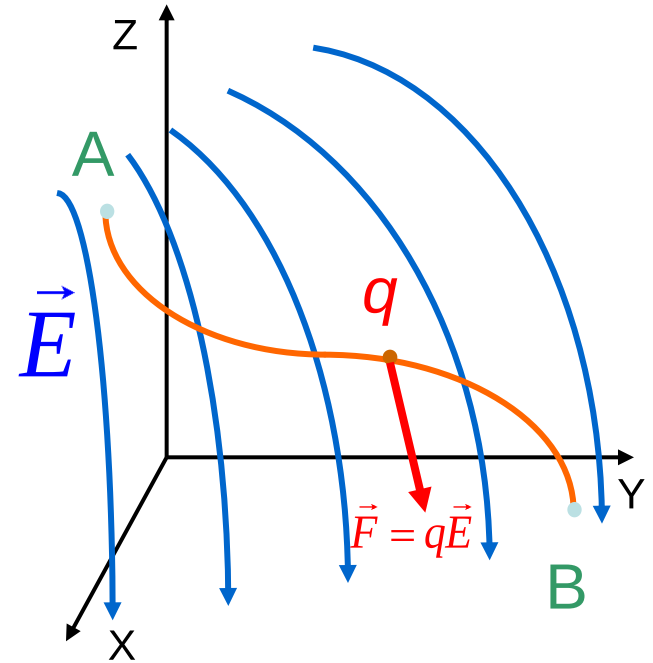
1. Trabajo y energía en presencia de campos ***E***

Cuando en una región del espacio donde hay un campo eléctrico situamos un objeto con una carga eléctrica *q*, este experimenta una fuerza , ***F=q E***. Si deseamos mover dicha carga de un punto A a otro B del espacio habrá que realizar un trabajo.

Esto es igual que cuando en presencia del campo gravitatorio se desea mover un objeto de masa *m*.

En general, calcular el trabajo *W* para desplazar una carga eléctrica en presencia de un campo eléctrico ***E*** es tarea complicada. Pero, se simplifica al tener en cuenta que el campo eléctrico, igual que el campo gravitatorio, conserva la energía: **El campo eléctrico es un campo conservativo.**

Esto permite calcular *W* necesario para desplazar una carga de un punto A a un punto B como la diferencia de energía, Δ*U*, de dicha carga en ambos puntos.



Variación de energía

$$W = \underbrace{\int_{r_A}^{r_B} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}} = -\Delta U = \underbrace{U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)}$$

Trabajo para ir de A a B

Ecuación general para calcular W
Difícil de calcular<

Energías potenciales en los puntos inicial y final

2. Potencial electrostático

Como la relación entre la fuerza electrostática y el campo eléctrico en que se mueve la carga es:

$$\vec{F} = q\, \vec{E}(\vec{r})$$

Introduciendo esta relación en la definición anterior del trabajo:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} q\, \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = q\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\Delta U$$

Se define una nueva magnitud física denominada **potencial electrostático** *V(**r**)* creado por las cargas eléctricas que producen el campo eléctrico ***E*** como:

$$\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\frac{\Delta U}{q} = -V(\vec{r})$$

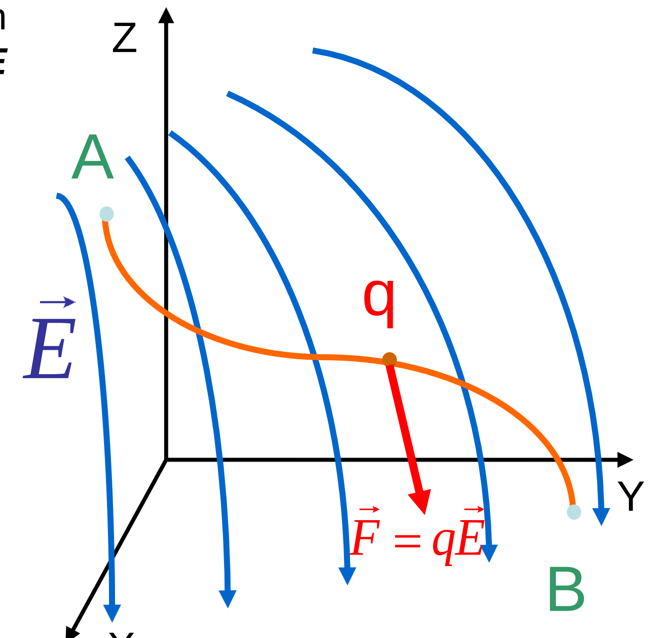
$$\boxed{V(\vec{r}) = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

En el SI la unidad de medida del potencial electrostático es el voltio: $[V] = [J/C] = \mathrm{V\ voltios}$

2. Potencial electrostático

Así definido, la energía potencial que tiene una carga eléctrica *q* en un punto del espacio ***r*** por estar sometida a un campo eléctrico ***E*** es:

$$\boxed{U(\vec{r}) = qV(\vec{r})}$$

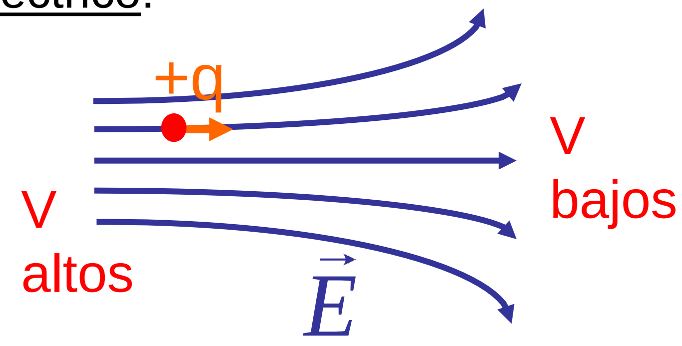


Por tanto el trabajo necesario para desplazar la carga de un punto A a un punto B del espacio será:

$$\boxed{W = q\left(V(\vec{r}_A) - qV(\vec{r}_B)\right)}$$

<u>Relación entre las líneas de campo y el potencial eléctrico</u>:

Si dejamos en libertad una carga de prueba <u>inicialmente en reposo</u> en el seno de un campo eléctrico, se acelera en el sentido de dicho campo y en la dirección de las líneas de fuerza. El hecho de que se acelere hace que varíe su energía cinética (aumentando) disminuyendo su energía potencial. Esto quiere decir que ***las líneas de campo señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico***.



3. Potencial electrostático: Trabajo y energía

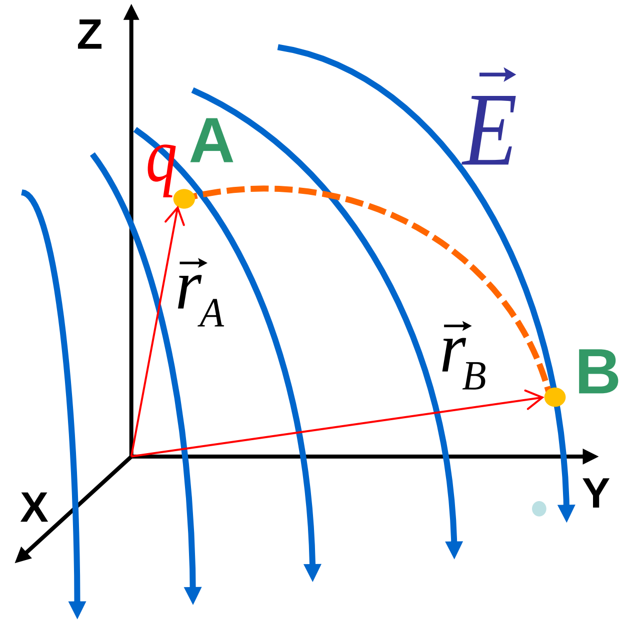
Las ideas fundamentales son:

• La interacción electrostática, igual que la gravitatoria, conserva la energía.

• El trabajo necesario par a llevar una carga *q* de un punto A a otro B es igual a diferencia de energías de la carga en A y en B:

$$U_{A\to B} = -\Delta W_{A\to B}$$

$$\Delta W_{A\to B} = q\Delta V_{A\to B} = q\left(V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)\right)$$



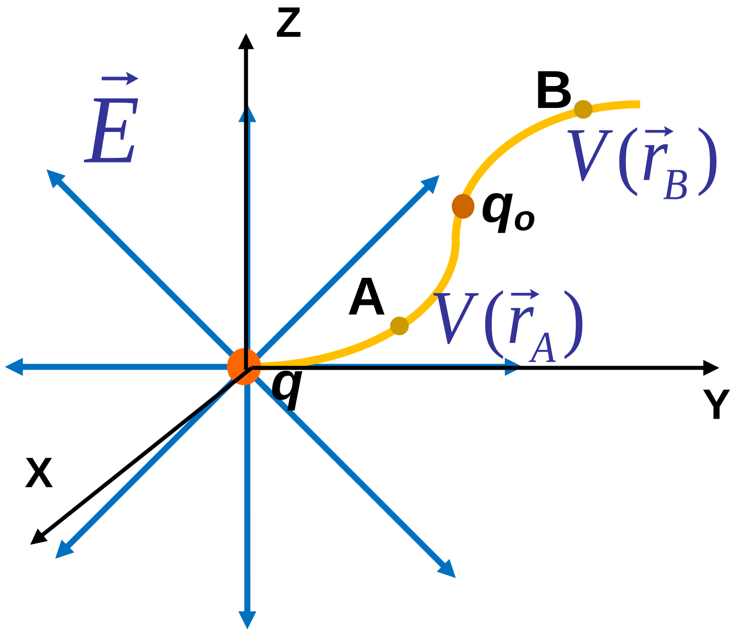
• El potencial eléctrico es una nueva magnitud física que nos permite calcular la energía potencial que una carga *q* tiene por encontrarse en campo eléctrico:

$$\boxed{\text{Energía Potencial}\,(\vec{r}_A) = U(\vec{r}_A) = qV(\vec{r}_A)}$$

Miguel Ángel Monge / Begoña Savoini

3. Potencial electrostático de una carga puntual

Es sencillo obtener la expresión del potencial electrostático creado por una carga puntual *q* a partir del campo eléctrico que produce.



Para ello calculamos el trabajo que se realiza para llevar otra carga de prueba q_0 de un punto A a otro B:

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{r}$$

Si introducimos la expresión del campo eléctrico creado por la carga puntual *q*, la integral es sencilla:

$$-\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A}\right)$$

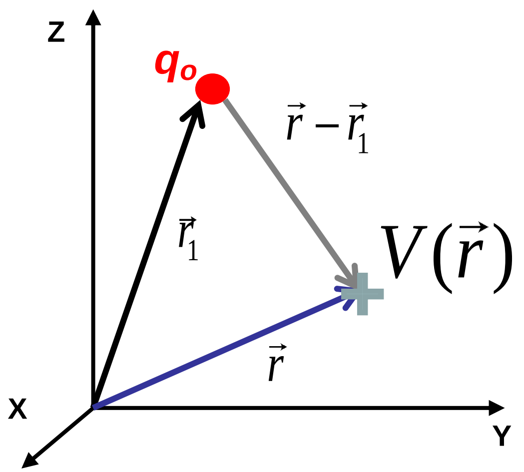
Tomando como origen de potenciales el infinito, podemos identificar el punto B= *r* y A= ∞:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|}}$$

Fijarse en que ***|r|*** *es la distancia de la carga q que produce el potencial, al punto donde se calcula.*

3. Potencial electrostático de una carga puntual

Expresión general del potencial electrostático creado por una carga puntual:



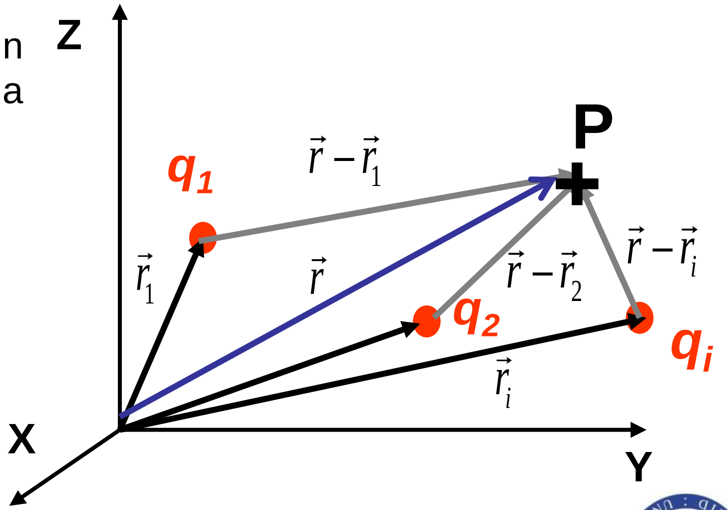
Una carga *q* situada en el punto dado por el vector posición $\boldsymbol{r_1}$ crea un potencial eléctrico en un punto del espacio ***r*** dado por:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}}$$

Principio de superposición:

El potencial eléctrico creado por *N cargas eléctricas* q_i, en un punto del espacio *r*, es la suma del potencial creado por cada una de ellas en el punto *r*.

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}}$$



Ejemplo 1:

Calcule el potencial eléctrico producido en el punto A=(0,4) m por la presencia de dos cargas puntuales q_1=9 nC y q_2=-18 nC en los puntos (0,0) y (0,1) m.

Solución en los problemas planteados. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

4. Potencial y campo electrostático

Matemáticamente, la relación entre el campo eléctrico y el potencial electrostático es mediante una integral de línea, como ya hemos visto:

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

Aplicando conocimientos avanzados de calculo a la expresión anterior, se puede demostrar que:

<u>El campo eléctrico es un campo conservativo</u> : Se dice que deriva de una función potencial escalar, de forma que se cumple

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right)}$$

Además se cumple:

<u>La fuerza electrostática es una fuerza central</u>: La dirección de los vectores fuerza pasan por un punto fijo llamado **Centro o Polo del Campo** y cuyo módulo sólo es función de la distancia al centro.

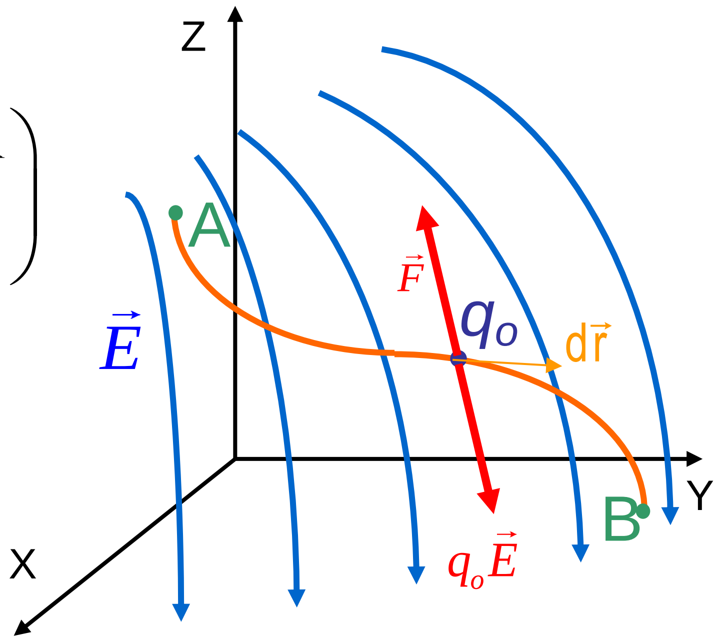
4. Potencial y campo electrostático

Como el campo eléctrico es conservativo, el trabajo realizado se corresponde con la variación de energía. Si solo hay energía potencial:

$$W = \int_{ri}^{rf} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = -\Delta U = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) = -\Delta \text{Energía Potencial}$$

Por tanto, lo anterior (ser conservativo implica que):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right)$$

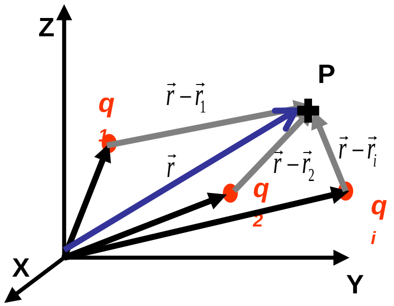


<u>El criterio de signos es:</u>

1.- Si *W* positivo implica que el campo eléctrico realiza el trabajo de forma al llevar la carga desde el punto inicial al final.
2.- Si es negativo, una fuerza externa deberá aportar esa energía para realizar el trabajo.

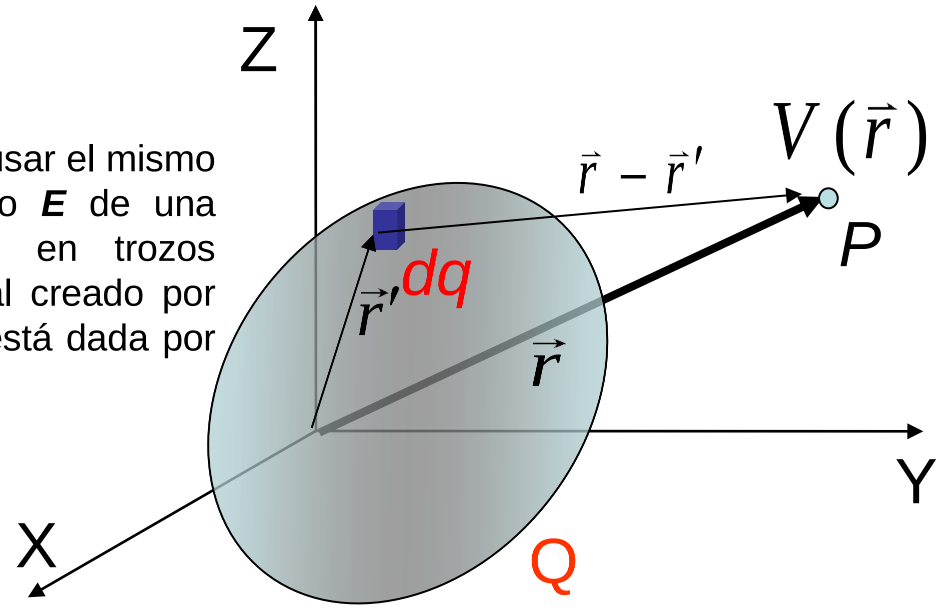
4. Potencial electrostático de distribuciones de carga

Hemos visto que para un sistema formado por N cargas puntuales, el potencial eléctrico creado por ellas en un punto P del espacio, cuya posición está dada por el vector ***r***, es:



$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_{q_i}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Para una distribución continua de cargas podemos usar el mismo procedimiento aplicado para el calculo de campo ***E*** de una distribución continua. Dividimos la distribución en trozos diferenciales de carga *dq, y sumamos* el potencial creado por cada *dq* en el punto P del espacio, cuya posición está dada por el vector ***r***, donde se desea conocer el valor de **V**:



$$\boxed{V(\vec{r}) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

4. Potencial electrostático de distribuciones de carga

Otra forma de obtener V es a partir de su definición. Por tanto hay dos formas equivalentes de calcular el potencial eléctrico V de una distribución de carga:

I Conocido el campo eléctrico creado por la distribución:

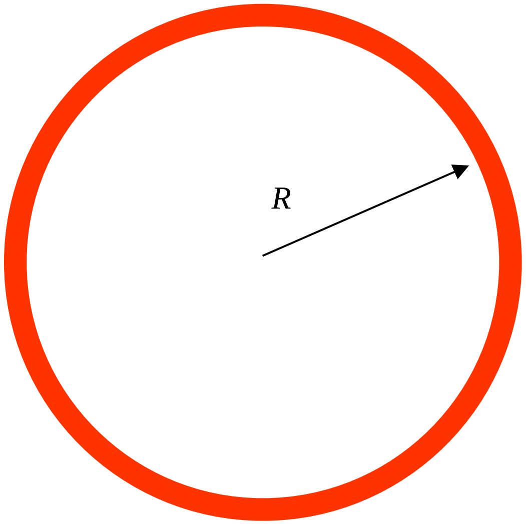
$$\boxed{V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

II Si conocemos la distribución de caga:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

4. Potencial electrostático de distribuciones de carga

Ejemplo 2: Calcular el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio creado de una corteza esférica muy delgada de carga total Q y radio R.

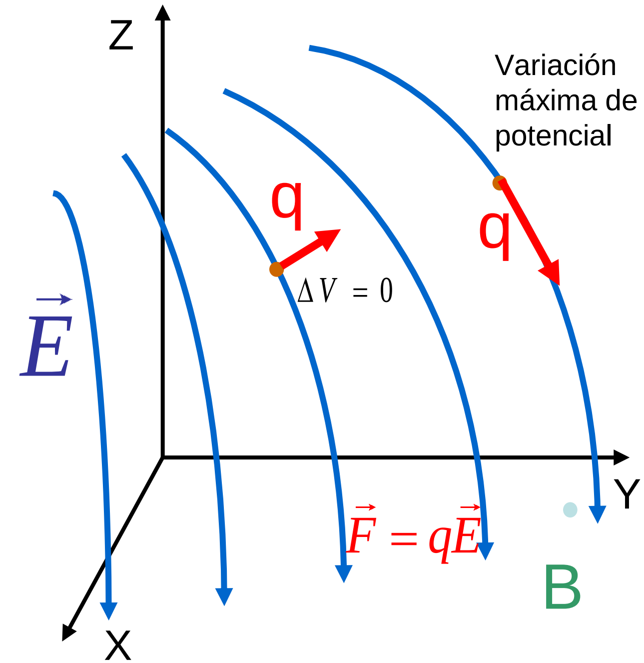


Solución en los problemas planteados. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado

5. Superficies equipotenciales

Vamos a suponer que en una región del espacio existe un campo eléctrico, representado por sus líneas de campo. El trabajo necesario para desplazar una carga de prueba, q_o, una distancia infinitesimal será el producto escalar:

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Si movemos una carga eléctrica perpendicularmente a ***E*** no se realiza trabajo. El trabajo máximo es cuando la carga se mueve en la dirección paralela al campo eléctrico ***E***.

En términos de incrementos

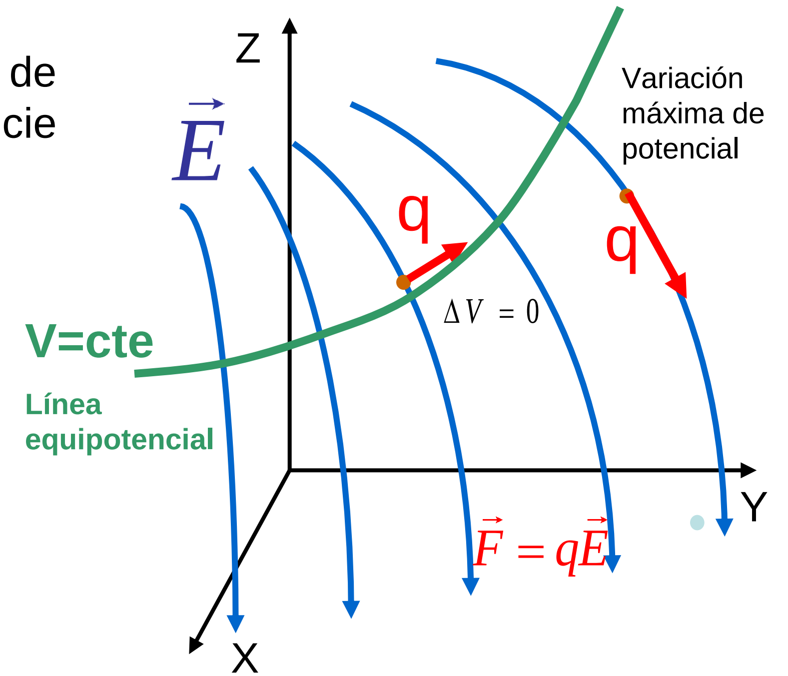
$$\Delta V \approx -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \begin{cases} \Delta\vec{r} \ perpendicular \ a \ \vec{E} \longrightarrow \Delta V = 0 \longrightarrow \text{V constante} \\ \Delta\vec{r} \ paralelo \ a \ \vec{E} \longrightarrow \text{Variación máxima de potencial} \end{cases}$$

5. Superficies equipotenciales

<u>Superficie equipontecial</u>: *Es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran al mismo potencial.* Cumplen la condición de encontrarse en un plano perpendicular al campo eléctrico

El trabajo desarrollado para mover una partícula de un punto A a otro punto B a lo largo de una superficie equipotencial es nulo, ya que

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o}$$



A lo largo de una superficie equipotencial

$$V_A = V_B \longrightarrow W_{AB} = 0$$

<u>A lo largo de una línea equipotencial el potencial eléctrico es constante</u>.

5. Superficies equipotenciales

Las superficies/líneas equipotenciales cumplen:

- El potencial es constante en todos los puntos de la superficie.

$$V(x,y,z)=cte$$

- El vector gradiente es ortogonal a superficie/línea equipotencial.

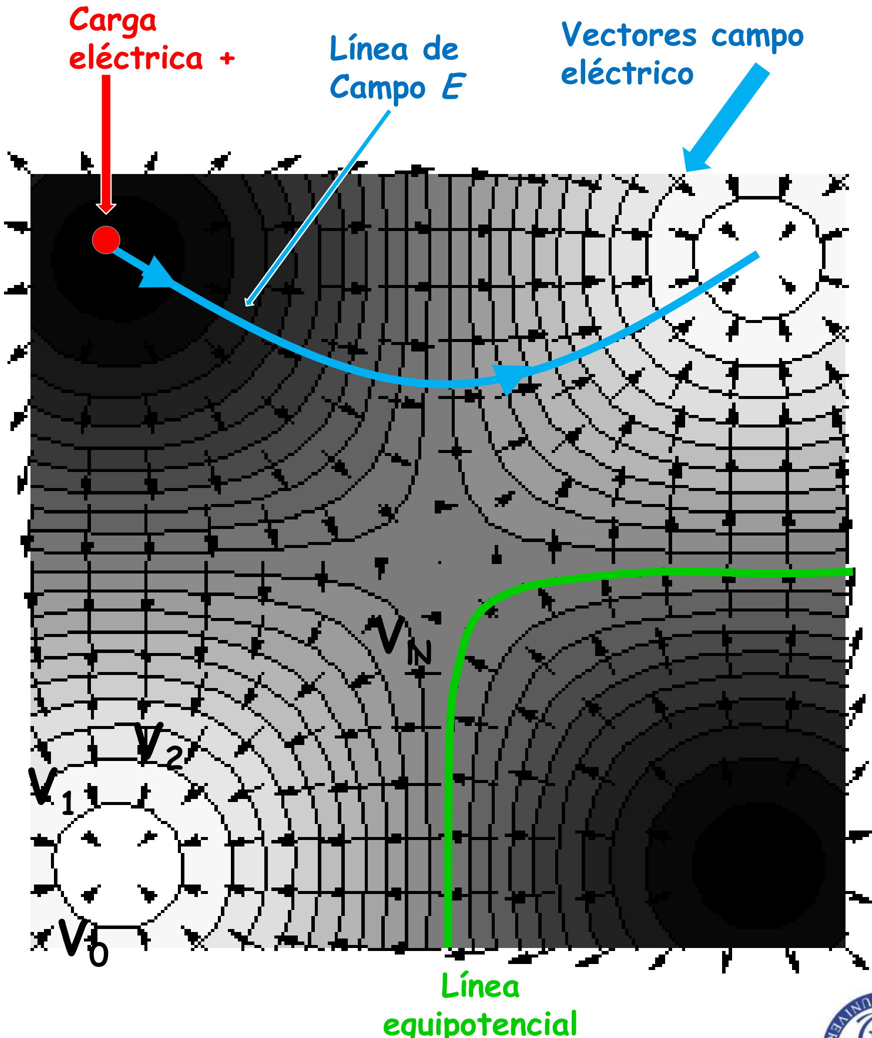
$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}_{\parallel}=-\vec{\nabla}V\cdot\Delta\vec{r}_{\parallel}=V_i-V_i=0$$

- El gradiente y $r_{\parallel}$ son ortogonales

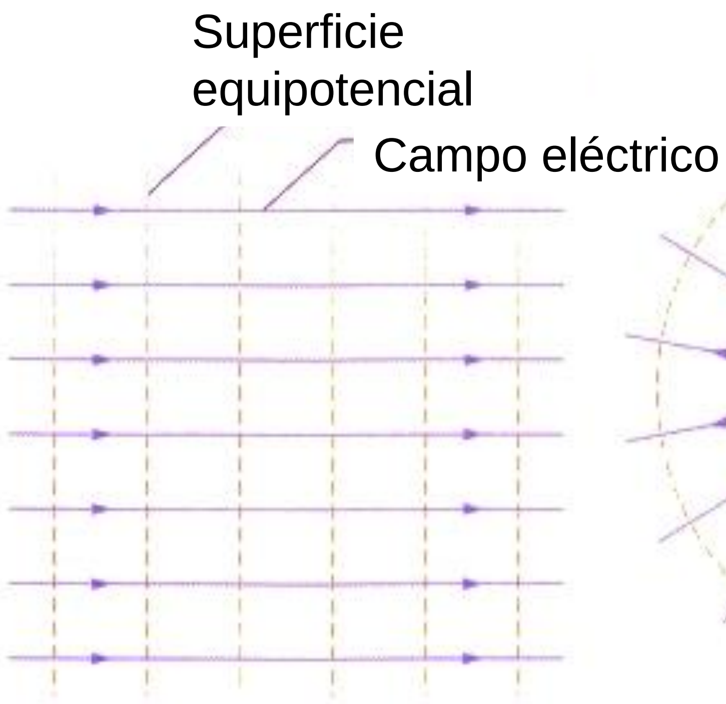
- El vector gradiente va de menores a mayores valores de V.

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}_{\perp}=-\vec{\nabla}V\cdot\Delta\vec{r}_{\perp}=-(V_j-V_i)<0$$

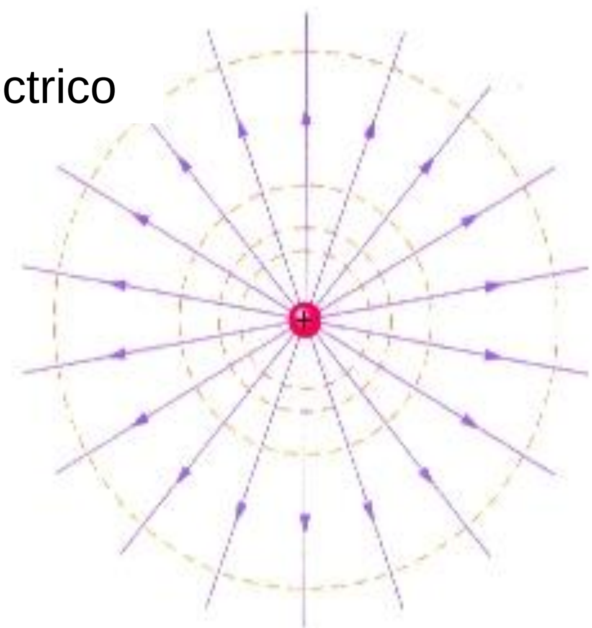
$$V_j>V_i$$



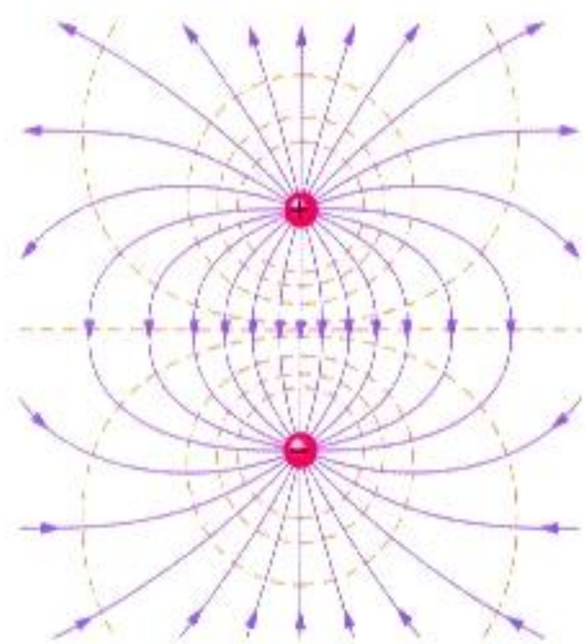
5. Superficies equipotenciales



Campo producido por un hilo infinito



Campo producido por una carga puntual



Campo producido por un dipolo

Miguel Ángel Monge / Begoña Savoini

5. Superficies equipotenciales

Ejemplo 3:

Si el potencial eléctrico en una región del espacio está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{z^2}$$

calcule el campo eléctrico, y representar las líneas equipotenciales de 4 V, 2 V, 0 V y -2 V así como el campo eléctrico.

Solución en los problemas planteados. Intenta solucionarlo sin mirar el resultado