Control Inteligente

Fundamentos de la Lógica Fuzzy
Reglas borrosas
L2

Luis Moreno, Santiago Garrido, Dorin Copaci

Dpto. Ing. de Sistemas y Automática
Universidad Carlos III
Madrid

Oct 2019

Table of contents

Razonamiento Aproximado

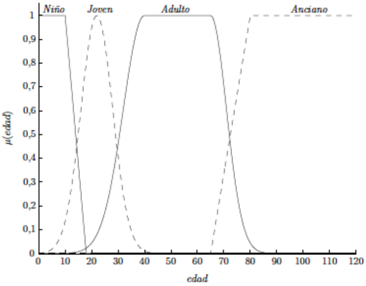
- Es la forma más conocida de lógica borrosa y cubre una amplia variedad de reglas de inferencia cuyas premisas contienen proposiciones borrosas.
- La inferencia en el razonamiento aproximado es el cálculo con conjuntos borrosos que representan el significado de un cierto conjunto de proposiciones borrosas.
- Por ejemplo:
  - Dadas las funciones de pertenencia μ_A y μ_R que representan los significados de la proposición borrosa *X es A* y el del condicional borroso **if** *X es A* **then** *Y es B*,
  - Es posible calcular la función de pertenencia que representa el significado de la conclusión, *Y es B*.

Variables Lingüísticas

- El concepto de variable lingüística fue introducido por Zadeh. Las variables lingüísticas permiten el acercamiento de la lógica borrosa al lenguaje natural, facilitando la utilización lógica del lenguaje ordinario y eludiendo las deficiencias del lenguaje preciso en el área del control.
- Esta idea presente en los primeros trabajos de Zadeh, y se formalizó finalmente en el conocido **Principio de Incompatibilidad**:
  - *A medida que la complejidad de un sistema aumenta, disminuye nuestra capacidad para hacer afirmaciones precisas, incluso significativas, sobre su comportamiento, hasta que se alcanza un umbral más allá del cual precisión y relevancia son características casi mutuamente excluyentes.*

Variables Lingüísticas

- La unidad de representación de conocimiento fundamental en razonamiento aproximado es la noción de *variable lingüística*. Que en palabras de Zadeh es:
    - *Por variable lingüística entendemos una variable cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial. Por ejemplo, **edad** es una variable lingüística si sus valores en vez de numé ricos son por ejemplo: joven, no joven, muy joven, bastante joven, viejo, no muy viejo, no muy joven, etc , en vez de 20, 21, 22, 23, ...*



Variables lingüísticas

- Una variable lingüística podemos representarla por el siguiente conjunto de elementos

$$\langle X, LX, \Delta_X, M_X \rangle$$

donde:

  - X representa el *nombre simbólico* de la variable lingüística (edad, altura, velocidad, error, etc).
  - LX representa el conjunto de *valores lingüísticos* que Xpuede tomar (la temperatura T podría tomar los valores

    LT={*frio, fresco, confortable, templado, caliente*}
  - Δ_X es el dominio físico real sobre el que la variable lingüística X toma sus valores cuantitativos (o precisos) (para la temperatura podría ser el intervalo [-10°C,25°C]). También se suele denominar universo de discurso y se representa por U.
  - M_X es una función semántica que da un *significado* a un valor de la variable lingüística en función de los elementos cuantitativos de X, por ejemplo:

$$M_X = LX \rightarrow L\tilde{X}$$

Variables lingüísticas

- Cont:
  - donde $\tilde{LX}$es una notación para un conjunto borroso definido sobre X de forma que para X discreto

$$\tilde{LX} = \sum_X \mu_{LX}(x)/x$$

    y para para X continuo

$$\tilde{LX} = \int_X \mu_{LX}(x)/x$$

- Supongamos la variable lingüística E, que significa error.
  - El marco de referencia de esta variable E es $\langle E, LE, \Delta_E, M_E \rangle$, donde:

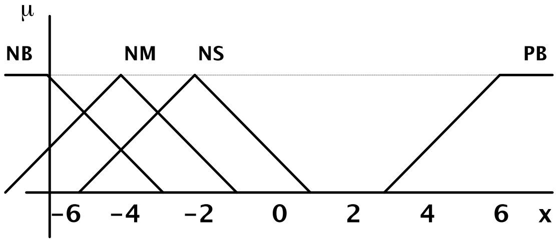
$$
\begin{array}{l}
LE = \{NB, NM, NS, ZO, PS, PM, PB\} \\
\Delta_E = [-6, 6] \\
M_E : LE \to \tilde{LE}
\end{array}
$$

y las funciones de pertenencia de los términos lingüísticos son las siguientes:

$$
\begin{array}{l}
N\tilde{B} = \tilde{LE_1} = \int_{-6}^{6} L(x; -6, -3)/x \\
N\tilde{M} = \tilde{LE_2} = \int_{-6}^{6} \Lambda(x; -7, -4, -1)/x \\
N\tilde{S} = \tilde{LE_3} = \int_{-6}^{6} \Lambda(x; -5, -2, -1)/x \\
\vdots \\
P\tilde{B} = \tilde{LE_7} = \int_{-6}^{6} \Gamma(x; 3, 6)/x
\end{array}
$$

Variables lingüísticas

- Ejemplo:
  - Gráficamente



Variables lingüísticas

- Notas:
  - Un mayor número de términos lingüísticos en la representación de una variable permite mayor precisión.
  - Un número mayor de etiquetas lingüísticas permite más precisión; pero a costa de una mayor complejidad.
  - El número de valores que suele discriminar un ser humano varía entre cinco y nueve.
  - Conviene escoger un número impar de etiquetas. De esta forma existirá una etiqueta central, que hará las veces de neutral, y el resto se distribuirá a sus lados.
  - Si la dimensionalidad del espacio entrada-salida es grande, el número de reglas crece exponencialmente (problema de la dimensionalidadde los sistemas borrosos).
  - Para reducir este problema se emplean procedimientos de selección de reglas que tienen más precisión en las zonas que lo requieran sin aumentar excesivamente el número de éstas.

Proposiciones borrosas

- El razonamiento aproximado es utilizado para representar y razonar con conocimiento expresado en **primitivas atómicas**, las cuales están expresadas por medio de lenguaje natural.
- Por ejemplo:

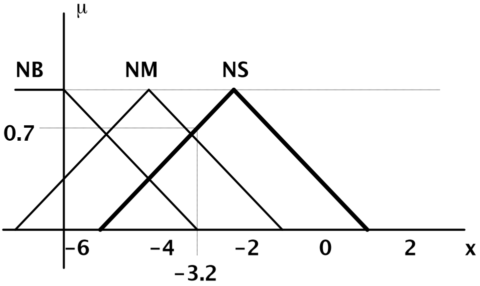
  el error tiene valor negative-small

  su traducción en términos de variables lingüísticas es de la siguiente forma:

  $$E \text{ es } NS$$

- Esta expresión se denomina **proposición borrosa atómica**. El significado de esta expresión atómica está definido por el conjunto borroso $\tilde{NS}$ o por la función de pertenencia μ_{NS} , definidos sobre el dominio físico normalizado $\Delta_E = [-6, 6]$ de la variable física *error*.

- El significado de la expresión simbólica "E es NS"nos ayuda a decidir el grado en el que esta expresión simbólica se verifica para un valor del error.
  - Supongamos que el valor del error (preciso) es -3.2, este valor se le asigna al símbolo E , con este valor de E se entraría en la función de pertenencia μ_{NS} y obtendríamos el grado en el que se satisface la expresión simbólica "E es NS", es decir $\mu_{NS}(-3{,}2) = 0{,}7$.



Proposiciones borrosas compuestas

- Basado en la noción de proposición borrosa atómica y las conectivas lingüísticas del tipo **and**, **or**, **not**, e **if then** es posible formar proposiciones borrosas de mayor complejidad denominadas proposiciones borrosas compuestas.
  - Por ejemplo:

$$X \text{ es } A \textbf{ and } X \text{ es } B,$$
$$X \text{ es } A \textbf{ or } X \text{ es } B,$$
$$X \text{ es } \textbf{not } A,$$
$$(X \text{ es } A \textbf{ and } X \text{ es } \textbf{not } B) \textbf{ or } X \text{ es } C,$$
$$\textbf{if } X \text{ es } A \textbf{ then } X\text{es } B.$$

- El significado de estas proposiciones compuestas borrosas se obtiene por la interpretación de las conectivas **and, or** y **not**, como **conjunción**, **disyunción** y **negación** respectivamente.

Conjunción

- Si *p* y *q* son dos proposiciones borrosas atómicas de la forma: *p*: X es A y *q*: Xes B donde A y B son dos conjuntos borrosos definidos sobre el mismo universo de discurso U.
- La *conjunción* se define como X es $A \cap B$, y el significado de la conclusión X es $A \cap B$ viene dado por $\mu_{A \cap B}$.
- En el caso de que la proposiciones borrosas tengan sus variables lingüísticas definidas sobre dominios diferentes, sean: *p*: E es NB y *q*:$\dot{E}$ es PS donde su significado está representado como

$$\begin{aligned} N\tilde{B} &= \int_{\Delta_E} \mu_{NB}(e)/e \\ P\tilde{S} &= \int_{\Delta_{\dot{E}}} \mu_{PS}(\dot{e})/\dot{e} \end{aligned} \tag{1}$$

- En este caso. los dominios son diferentes, Δ_E y $\Delta_{\dot{E}}$. Aquí el significado de la conjunción en la proposición compuesta r: E es NB **and** $\dot{E}$ es PS está representado como una relación borrosa definida sobre Δ_Ex$\Delta_{\dot{E}}$como sigue:

$$\mu_r(e, \dot{e}) = \int_{\Delta_E \times \Delta_{\dot{E}}} min\,(\mu_{NB}(e), \mu_{PS}(\dot{e}))/(e, \dot{e})$$

Disyunción

- La disyunción se define como "X es $A \cup B$", y el significado de la conclusión "X es $A \cup B$"viene dado por $\mu_{A \cup B}$.
- En el caso de que los universos de discurso sean diferentes como en el caso de

  s: E es NB **or** $\dot{E}$ es PS

  tendremos que:

$$\mu_S(e, \dot{e}) = \int_{\Delta_E \times \Delta_{\dot{E}}} max\,(\mu_{NB}(e), \mu_{PS}(\dot{e}))/(e, \dot{e})$$

Negación

- La negación "X es **not** A"de una proposición borrosa "X es A"viene dada por $\mu_{A'}$, donde A' es el complemento de A.

Reglas If-then borrosas

- Una clausula condicional borrosa o regla de producción **if-then** se expresa simbólicamente como:

  if <proposición borrosa> **then** <proposición borrosa>

- donde:

  - La premisa de la regla, es decir, la condición, se conoce como antecedente, mientras que la consecuencia se conoce como consecuente.
  - El consecuente de una regla puede ser un conjunto borroso, un punto borroso, o una función dependiente de las entradas.
  - El operador que relaciona la premisa con la consecuencia se conoce como operador de implicación, y se representa lingüísticamente con el adverbio entonces (then). Existen muchas maneras de definir el concepto de implicación y se pueden generar distintas funciones en base a T-normas y S-normas.

- Es posible representar el significado de la regla **if** X es A **then** Y es B por medio de diferentes operadores (relaciones) de implicación.
- En primer lugar, podríamos considerar que el significado de la regla

  if A **then** B

  es el mismo que el de la proposición borrosa compuesta

  not A **or** B
- La operación **or** se realiza mediante la operación de unión, pero para realizar la operación de unión es necesario la extensión de **not** A y de B, la negación se realiza con la operación $1-$. y la unión mediante la operación máximo. Es decir

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mathrm{notAorB}} &= \max\left(\mu_{ce(A\prime)}(x,y), \mu_{ce(B)}(x,y)\right) \\
&= \max\left(1-\mu_{ce(A)}(x,y), \mu_{ce(B)}(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

Operadores de implicación

- **Implicación Kleene-Dienes.** Es la relación que acabamos de ver. Podemos denotarla por R_b y se define por

$$\tilde{R}_b = ce(\tilde{A}\prime) \cup ce(\tilde{B})$$
$$\mu_{R_b}(x, y) = \max\left(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$

- **Implicación Zadeh**. Esta implicación se basa en la equivalencia que tienen en lógica binaria las tablas de verdad de las expresiones $p \rightarrow q$ y $(p \ \wedge \ q) \vee \neg p$. Basándose en esta equivalencia Zadeh propuso la siguiente relación

$$\tilde{R}_m = \left(ce(\tilde{A}) \cap ce(\tilde{B})\right) \cup ce(\tilde{A}\prime)$$
$$\mu_{R_m}(x, y) = \max\left(\min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right), 1 - \mu_A(x)\right)$$

Operadores de implicación

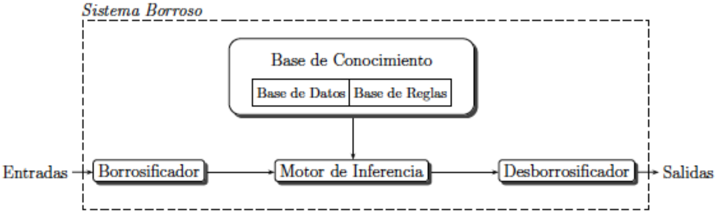
- **Implicación Mamdani.** Esta implicación es la mas importante y utilizada en control borroso. Su definición se basa en la operación de intersección, es decir $p \to q \ \equiv (p \ \wedge \ q)$. La relación R_c , (c de conjunción) se define como:

$$\tilde{R}_c = \left(ce(\tilde{A}) \cap ce(\tilde{B})\right)$$
$$\mu_{R_c}(x, y) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$

Operadores de implicación

- Nombre : $\mu_{Implicacion}(x, y)$.
  - Mamdani (mínimo): $min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$
  - Larsen (producto): $\mu_A(x)\mu_B(y)$
  - Reichencach: $1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)$
  - Lukasiewicz: $min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$
  - Zadeh-Willmott: $max\{1 - \mu_A(x), min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}$
  - Kleene-Dienes: $max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$
- De estos los más importantes y utilizados son los operadores de Mamdani y Larsen.

- Los sistemas de inferencia borrosos se componen básicamente de dos elementos: el motor de inferencia y la base de conocimiento.
- Si la aplicación es sobre datos crisp se requieren: el borrosificador y el desborrosificador que permiten conectar al sistema de inferencia borroso con el mundo real



Borrosificación (Fuzzyfication)

- Si la entrada al sistema borroso es un valor preciso es necesario emplear un borrosificador se necesita convertir el valor preciso de entrada en un conjunto borroso.
- El sistema de borrosificación más simple consiste en sustituir el valor numérico por un conjunto borroso de tipo *singleton*, o punto borroso. Esta borrosificación simplifica de forma notable los cálculos necesarios para la aplicación posterior de la norma de composición.
  - Por ejemplo, un valor de entrada no borroso $x = 11$ puede ser representado por el conjunto borroso $A = \bar{11}$, cuya función de pertenencia se correspondería con la ecuación.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

Borrosificación (Fuzzyfication)

- Asignar a cada entrada una representación borrosa mediante **términos lingüísticos** definidos en su correspondiente universo de discurso.
    - Este esquema es más complejo y aporta poco al sistema, por lo que no es frecuente su utilización.
- Sustituir la variable numérica de entrada por un conjunto borroso que represente mediante una **distribución de posibilidad** (función de pertenencia) los posibles valores que ésta podría tomar realmente.
    - Este esquema es útil si hay que tratar con un continuo de medidas dentro de un rango, o si se desea incorporar la incertidumbre de medida; sin embargo, supone una mayor complejidad del sistema de inferencia.

Inferencia borrosa

- El motor de inferencia borrosa es el mecanismo que permite obtener la salida de un sistema borroso en función de sus reglas y las entradas que le sean aplicadas. Se requieren los pasos siguientes:
  1. Calcular el grado de cumplimiento de cada antecedente en función de la entrada del sistema.
  2. Composición de todos los antecedentes de cada regla según la definición lingüística de la misma .
  3. Mediante el operador de implicación, se obtiene el consecuente resultante de cada regla.
  4. Mediante la regla composicional u operador de agregación se combinan los resultados de todas las reglas en un único conjunto borroso.
  5. Si la aplicación requiere que la salida sea numérica, se necesitará aplicar un desborrosificador a la misma.

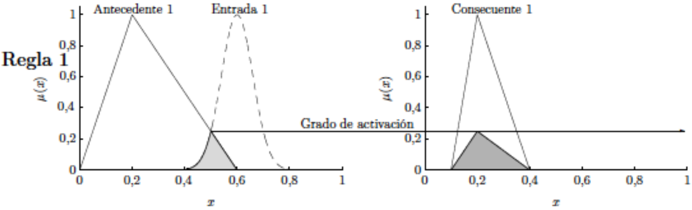
Inferencia borrosa

1. Calcular el grado de cumplimiento de cada antecedente en función de la entrada del sistema.
   - Para un borrosificador tipo singleton el valor se obtendrá directamente de la intersección de la entrada con la función de pertenencia del antecedente; mientras que si la entrada está representada por una función de pertenencia no singleton, será necesario aplicar un operador de intersección, una T-norma, sobre dichos conjuntos.
2. Composición de todos los antecedentes de cada regla.
   - Según la definición lingüística de la misma aplicando los operadores de intersección (Y), unión (O) y complementación.
   - Esta medida proporciona un valor que representa la calidad con la que las reglas son satisfechas por la condición de entrada del sistema borroso, esto es, su grado de activación.

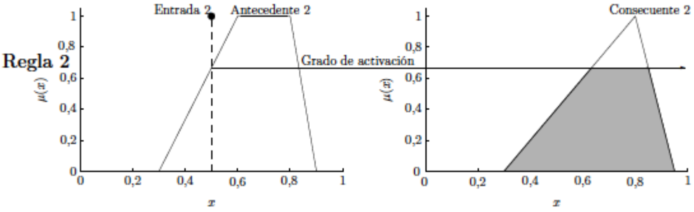
Inferencia borrosa

3. Obtención del consecuente resultante de cada regla.
    - En aplicaciones relacionadas con el control de procesos, los operadores de implicación más utilizados son las T-normas mínimo y producto.
    - Al emplear el operador mínimo, la función de pertenencia del consecuente es recortada a la altura definida por el grado de veracidad de la regla; mientras que si se emplea el operador producto, la salida es escalada según dicho grado de veracidad.
4. Combina los resultados de todas las reglas en un único conjunto borroso.
    - El máximo y la suma acotada suelen ser las S-normas más utilizadas para obtener el conjunto borroso de salida.
5. Se desborrosifica la salida en el caso de que sea necesario.

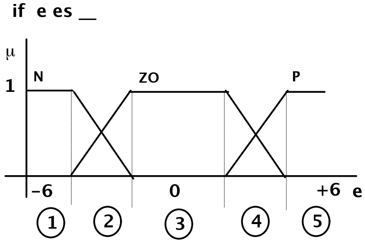
- En la figura se muestra un ejemplo de inferencia para una entrada borrosa pura (Entrada 1).
  - El grado de activación de la primera regla se obtiene mediante el máximo valor de la intersección clásica entre el conjunto borroso de entrada y el del antecedente.
  - Este valor es propagado hacia el consecuente de la regla, obteniéndose el conjunto borroso de salida de ésta mediante el operador de implicación producto.

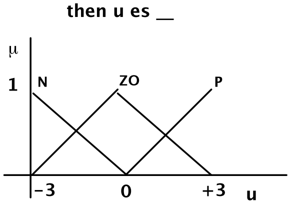


- En la figura se muestra un ejemplo de inferencia para un punto borroso (Entrada 2).
  - Para la segunda regla, el grado de activación se obtiene evaluando la función de pertenencia del Antecedente 2 en el punto dado por la Entrada 2.
  - Este grado de activación es propagado hacia su consecuente, obteniéndose mediante el operador de implicación mínimo el conjunto borroso de salida de la segunda regla.
  - El conjunto borroso final resultado de las dos reglas, obtenido con el operador de conjunción máximo,

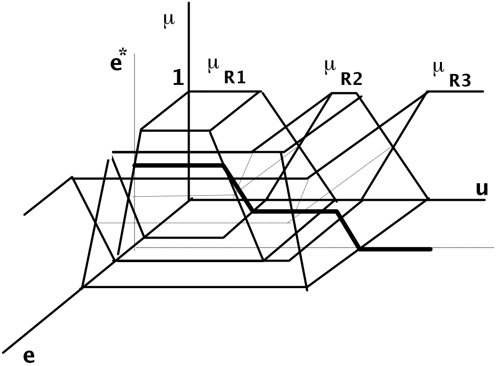


- Un controlador simple puede ser
  - $R1$: **if** e es N **then** u es N.
  - $R2$: **if** e es ZO **then** u es ZO.
  - $R3$: **if** e es P **then** u es P.
- Con antecedentes y consecuentes definidos como:





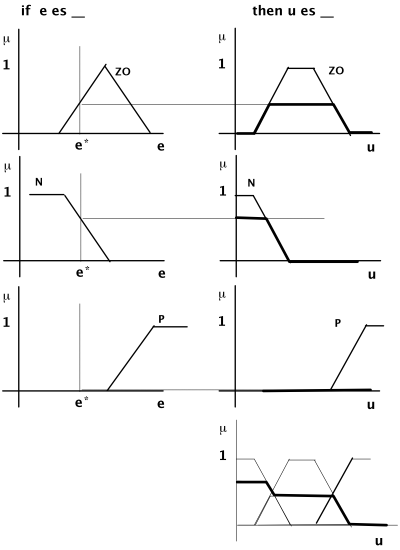
- Componiendo todas las reglas en una única relación borrosa.



Inference borrosa

Basada en el disparo de reglas individuales

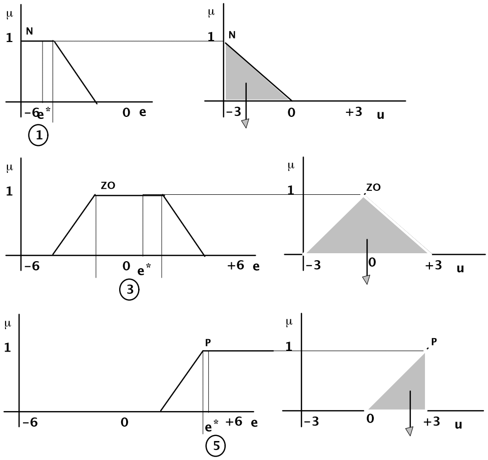
- Disparando individualmente todas las reglas.
- Componiéndo los resultados individuales en un único conjunto de salida.



Inferencia borrosa

Disparo de reglas individuales

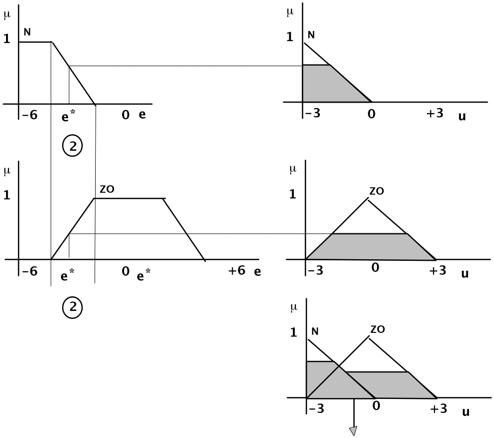
- Salida del controlador en las zonas 1,3 y 5.
- Solo se activa una regla en cada zona



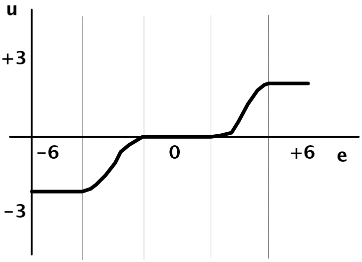
Inferencia borrosa

Disparo de reglas individuales

- Salida del controlador para entrada en zona 2



- Curva global de respuesta del controlador (ley de control).



Base de conocimiento

- La base de conocimiento (knowledge base) almacena las relaciones existentes entre las entradas y salidas del sistema. Basándose en este conocimiento, el proceso de inferencia obtendrá las salidas asociadas a las entradas del mismo.
- Este elemento puede subdividirse en dos partes:
  - La **base de datos** (data base) contiene la definición de las variables lingüísticas empleadas en las reglas, es decir, las funciones de pertenencia que definen cada una de las etiquetas lingüísticas.
  - La **base de reglas** (rule base) contiene la colección de reglas lingüísticas del sistema. Ésta puede representarse como una lista de reglas, que es la forma más habitual, o mediante una tabla o matriz de decisión, que proporciona un formato más compacto si existen pocas variables.

- Existen varios métodos para la obtención de las reglas de un sistema borroso, entre los que cabe destacar:
    - Basados en el **conocimiento de un experto**, o heurísticos. Generalmente se obtiene su conocimiento mediante unos cuestionarios cuidadosamente organizados que permitan la generación de reglas del tipo Si-Entonces.
    - Basados en las **acciones de control de un operador**, en función de los datos de entrada- salida observados durante un período suficientemente amplio de operación.
    - Basados en **aprendizaje** mediante algoritmos automáticos.

Desborrosificador (Defuzzifier)

- Cuando la salida del sistema de inferencia es un conjunto borroso pero la aplicación requiere que sea un valor numérico concreto, es necesario emplear un desborrosificador (defuzzifier).
- Este elemento convierte dicho conjunto en un valor numérico del universo de discurso de salida que será representativo de la conclusión obtenida

Desborrosificador (Defuzzifier)

- Existen muchos métodos de desborrosificación, entre los más usados están:
    - Método del centro de gravedad o del centroide.
    - Método del centro de sumas.
    - Método de la altura.
    - Método de la máxima pertenencia.
    - Método del centroide indexado.

Desborrosificador (Defuzzifier)

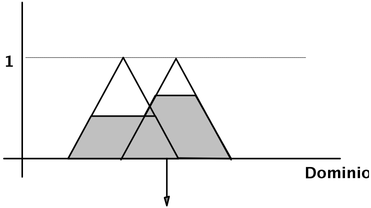
Método del centro de gravedad o del centroide

- *Método del centro de gravedad o del centroide.*
  - La salida numérica se obtiene calculando el centro de gravedad del conjunto borroso de salida (es muy empleado por generar variaciones suaves y continuas de los valores de salida).
  - Siendo $D(y)$ el conjunto borroso de salida, su valor desborrosificado mediante este método ,y_o, se obtiene a partir de la ecuación

$$y_o = \frac{\int y\mu_D(y)\mathrm{d}y}{\int \mu_D(y)\mathrm{d}y} \tag{3}$$

y para valores discretos

$$y_o = \frac{\sum y\mu_D(y)\mathrm{d}y}{\sum \mu_D(y)\mathrm{d}y} \tag{4}$$

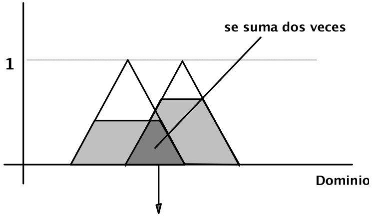


- *Método del centro de sumas.*
  - El conjunto borroso de salida, su valor desborrosificado mediante este método ,y_o, se obtiene a partir de la ecuación

$$y_o = \frac{\int y \sum_{k=1}^{l} \mu_k(y)\mathrm{d}y}{\int \sum_{k=1}^{l} \mu_k(y)\mathrm{d}y} \tag{5}$$

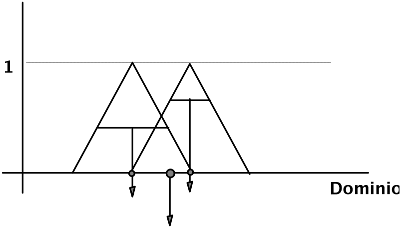
y para valores discretos

$$y_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=1}^{l} \mu_k(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \mu_k(y_i)} \tag{6}$$



- *Método de la altura*.
    - Este método toma el valor de pico de cada consecuente y calcula una suma ponderada de estos valores de pico, donde los pesos son los grados de pertenencia de la regla disparada. Su valor desborrosificado mediante este método ,y_o, se obtiene a partir de la ecuación

$$y_o = \frac{\sum_{i=1}^{l} \mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^{l} \mu_i(y)} \tag{7}$$

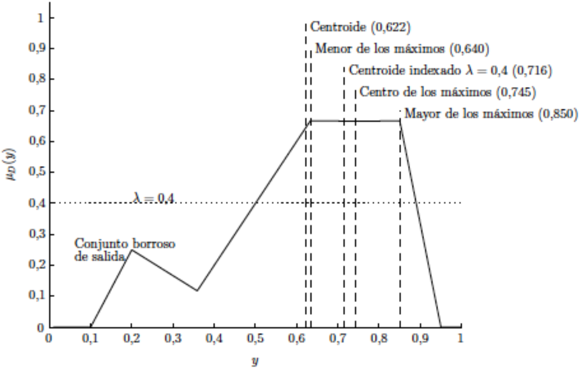


- *Método de la máxima pertenencia*.
  Siendo $D(y)$ el conjunto borroso de salida, el valor numérico y_o obtenido mediante el desborrosificador del máximo se corresponde con el valor de y para el que $\mu_D(y)$ alcanza su máximo valor.
  - Puesto que pueden existir múltiples valores para los que $\mu_D(y)$ tenga un mismo valor máximo, se hace necesario algún método para elegir el valor de y_o.
  - Estos métodos son:
    - El menor de los máximos,
    - El centro de los máximos.
    - El mayor de los máximos.
  - El desborrosificador de la máxima pertenencia se caracteriza por ser de muy fácil implementación, sin embargo, genera cambios bruscos en la salida que en muchas aplicaciones no son admisibles.

- Método del centroide indexado.
  Este método calcula el centro de gravedad de la parte correspondiente al conjunto borroso inferido cuyo grado de pertenencia sea mayor de un determinado valor.

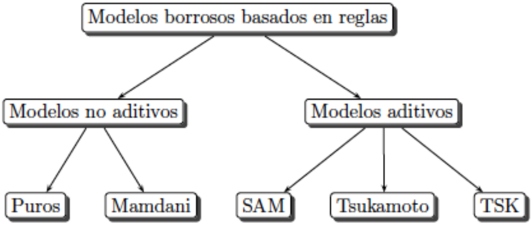
Desborrosificador (Defuzzifier)

- Comparación entre la salida generada por varios métodos de desborrosificación.



Tipos de sistemas borrosos

- En función de la forma de las reglas y del tipo de entradas y salidas, se distinguen cuatro tipos de sistemas borrosos:
  - Los sistemas puros,
  - Los sistema de tipo Mamdani,
  - Los de Sugeno o TSK
  - Los modelos aditivos de Kosko o SAM, junto con algunas variantes como los modelos de Tsukamoto.



Sistemas borrosos puros

- Los sistemas borrosos puros son sistemas cuyas entradas y salidas son conjuntos borrosos.
- Al no necesitar realizar ninguna transformación sobre las entradas o salidas, están compuestos tan sólo por la base de conocimiento y el motor de inferencia.

Modelo Mamdani

- En 1974 E. H. Mamdani estableció las bases para la aplicación de la lógica borrosa al control de sistemas.
- Posteriormente, junto con S. Assilian, consiguieron controlar una máquina de vapor mediante un conjunto de reglas lingüísticas obtenidas de la experiencia de los operadores de la máquina.
- De esta forma demostraron la potencia práctica de la teoría borrosa de Zadeh con la creación del primer sistema borroso aplicado a un problema de control.
- Desde entonces, el esquema de control borroso que utilizaron se conoce com modelo de control de Mamdani.
- El esquema de control borroso de Mamdani consta de los elementos ya comentados: un motor de inferencia, una base de conocimiento y unas interfaces tanto de borrosificación como de desborrosificación para procesar las entradas y salidas del sistema.

- Los sistemas borrosos de tipo Mamdani presentan una serie de ventajas que propician su uso en el ámbito del control:
  - Los modelos de tipo Mamdani se comportan como aproximadores universales.
  - Pueden utilizarse en aplicaciones reales, ya que tratan con facilidad entradas y salidas reales.
  - Proporcionan un marco natural para la inclusión del conocimiento de expertos en forma de reglas lingüísticas.
  - Existe gran libertad a la hora de escoger el método de inferencia borrosa, así como los interfaces de borrosificación y desborrosificación.

- También poseen una serie de limitaciones:
  - Falta de flexibilidad debido a la rigidez con que se particionan los espacios de entrada y salida.
  - No existe una distinción clara entre el conocimiento experto y la definición de las variables lingüísticas incluidas en las reglas borrosas.
  - Cuando las variables de entrada al sistema dependen unas de otras, es muy complicado obtener una partición borrosa adecuada de los espacios de entrada.
  - El tamaño de la base de conocimiento depende directamente del número de variables y términos lingüísticos que existan en el sistema.
  - La interpretabilidad del sistema está ligada a la utilización de un número no excesivo de reglas, lo cual generalmente va en contra de la precisión del sistema borroso implementado.

Modelo Mamdani

- La base de reglas de un sistema Mamdani se configura mediante un conjunto de reglas de la forma:

$$R^r: \quad \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^r \text{ y } x_2 \text{ es } A_2^r \text{ y } \dots x_n \text{ es } A_n^r \text{ Entonces } y \text{ es } B^r \quad (8)$$

  donde:
  - $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las entradas del sistema,
  - $A_1^r, A_2^r, \dots, A_n^r$ son los conjuntos borrosos del antecedente de la regla r, $r = 1 \dots R$, definidos en los universos de discurso de sus entradas asociadas,
  - y es la salida del sistema,
  - B^r el conjunto borroso consecuente de la regla r, definido en el universo de discurso de la salida y.
  - En este tipo de sistemas, tanto las entradas $x_i, i = 1 \dots n$, como la salida y son valores numéricos.

Modelo Mamdani

- El grado de activación de la regla, ω^r, se obtiene mediante la aplicación del operador de intersección, que normalmente es alguna de las T-normas presentadas:

$$\omega^r = \alpha_1^r \wedge \alpha_2^r \wedge \ldots \wedge \alpha_n^r \tag{9}$$

  donde cada α_i^r representa el grado de emparejamiento entre la entrada x_i y el conjunto borroso antecedente A_i^r .
- El conjunto borroso de salida de la regla que genera el motor de inferencia, μ_{Bc}^r , viene dado por el operador de implicación:

$$\mu_{Bc}^r = \omega^r \wedge \mu_B^r \tag{10}$$

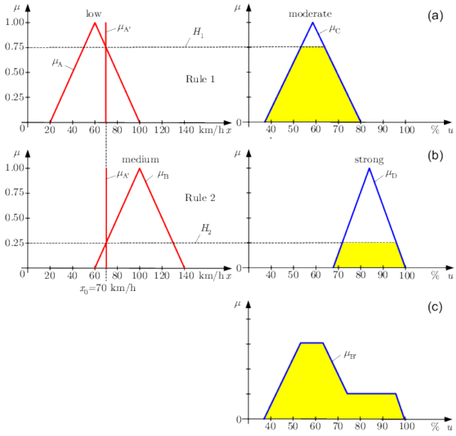
  siendo μ_B^r la función de pertenencia que define al conjunto borroso consecuente B^r.
- La salida borrosa del motor de inferencia, μ_B, se calcula agregando mediante una regla composicional, normalmente una S-norma, los efectos de todas las reglas del sistema:

$$\mu_B = \bigcup_{r=1}^{R} (\mu_{Bc}^r). \tag{11}$$

- Finalmente, el desborrosificador calcula la salida numérica del

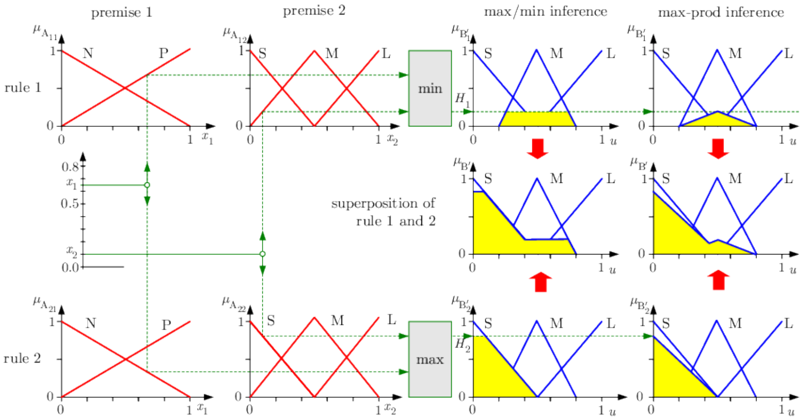
Modelo Mamdani

Funcionamiento del sistema (1 antecedente)



Modelo Mamdani

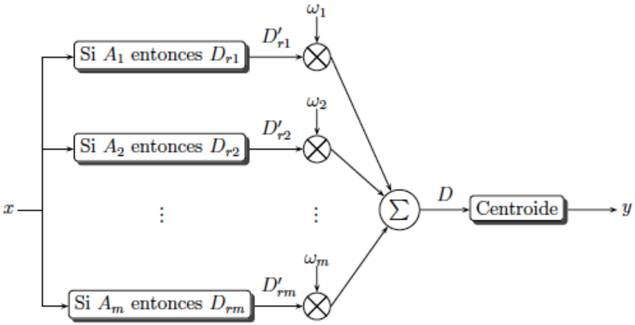
Funcionamiento del sistema (2 antecedentes)



Modelo aditivo estándar, SAM

- El modelo aditivo estándar, SAM (*Standard Additive Model*), es un caso particular de los modelos borrosos aditivos.
- Fue propuesto por Bart Kosko y su esquema puede verse en página siguiente.
- La principal ventaja de los modelos aditivos es su eficiencia, ya que las reglas pueden precomponerse en un formato menos costoso computacionalmente.
- El esquema de inferencia de un sistema SAM es similar al de los modelos TSK que se verán posteriormente, ya que ambos generan su salida en base a la suma ponderada de las consecuencias de cada una de las reglas de la base de conocimiento.
- Sin embargo, la estructura de las reglas de un sistema SAM es idéntica a las de los modelos de Mamdani, por lo que pueden considerarse como una variación de éstos.

- Diagrama de bloques de un modelo aditivo estándar (SAM).



Modelo aditivo estándar, SAM

- Existen varias diferencias fundamentales entre los esquemas de inferencia de los sistemas SAM y Mamdani:
  - En los modelos SAM la entrada x se considera siempre como un punto borroso.
  - Para la inferencia se utiliza el operador producto, frente al operador mínimo que suele emplearse en los modelos de Mamdani.
  - Frente al operador máximo que emplean los modelos de Mamdani, en los modelos SAM la combinación final D de las conclusiones parciales de cada regla borrosa D'_r, se realiza mediante una suma ponderada según los pesos ω. Esta forma de operar sitúa a los modelos SAM más cerca estructuralmente de los modelos TSK que de los Mamdani.
  - La salida y de un modelo aditivo estándar se calcula mediante la adición de las salidas parciales ponderadas, mientras que en los de Mamdani se debe especificar un desborrosificador.

Modelo de Tsukamoto

- Este modelo, propuesto por Tsukamoto en 1979, se caracteriza por representar el consecuente de cada regla borrosa mediante un conjunto borroso con una función de pertenencia monótona.
- La salida inferida por cada regla es un valor numérico inducido por el grado de activación de la regla.
- La salida global se toma como la media ponderada de todas las salidas parciales.
- Este tipo de modelos permiten eliminar el consumo de tiempo correspondiente a la desborrosificación, sin embargo, no son modelos muy utilizados por no ser tan transparentes como los de Mamdani o Sugeno.
- El mecanismo de inferencia no sigue estrictamente la regla composicional de inferencia y la salida es siempre numérica, incluso cuando las entradas son borrosas.

Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

- Los investigadores japoneses Takagi y Sugeno, con la posterior incorporación de Kang, propusieron un tipo de sistema borroso que en lugar de emplear reglas completamente lingüísticas, utiliza como consecuente una función de las variables de estrada del sistema.
- Este tipo de sistemas se conoce como modelos Takagi-Sugeno-Kang (TSK), modelos Takagi-Sugeno (TS) o de forma más simplificada, modelos Sugeno.

Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

- Una regla típica de un sistema TSK tiene la forma:

$$R^r: \quad \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^r \text{ y } x_2 \text{ es } A_2^r \text{ y } \ldots x_n \text{ es } A_n^r \text{ entonces } y^r = g^r(\mathbf{x}) \tag{12}$$

donde:

  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las entradas del sistema,
  - $A_1^r, A_2^r, \ldots, A_n^r$ son los conjuntos borrosos del antecedente de la regla r, $r = 1 \ldots R$, definidos en los universos de discurso de sus entradas asociadas,
  - y^r es la salida inferida por la regla r,
  - La consecuencia inferida a partir de la regla se calcula con la función $g^r(\mathbf{x})$, dependiente de las entradas del sistema.

Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

- La función consecuente, $g^r(\mathbf{x})$, puede escogerse libremente, aunque los consecuentes más utilizados son los polinomios de grado 0 y 1.
  - La utilización de polinomios de órdenes mayores o de funciones no polinómicas añaden complejidad y dificultan su interpretabilidad, por lo que no es muy común su uso.
  - Si la función consecuente es un polinomio de orden 0, se denomina *consecuente afín*, y las reglas tienen la forma dada por la ecuación;

$$\text{Si } x_1 \text{ es } A_1^r \text{ y } x_2 \text{ es } A_2^r \text{ y } \ldots x_n \text{ es } A_n^r \text{ entonces } y^r = b_0^r \tag{13}$$

  - mientras que si se emplea un *consecuente lineal* , o de orden 1, las reglas tienen la forma dada en

$$\text{Si } x_1 \text{ es } A_1^r \text{ y } x_2 \text{ es } A_2^r \text{ y } \ldots x_n \text{ es } A_n^r \text{ entonces } y^r = b_0^r + b_1^r x_1 + \ldots + b_n^r x_n \tag{14}$$

  - Los elementos $b_0^r, b_1^r, \ldots, b_n^r$ son parámetros reales, siendo b_i^r los términos que multiplican a la variable i-ésima del sistema, y b_0^r el término afín de la regla r.
- El consecuente TSK crea un hiperplano n-dimensional, donde los elementos b_i^r caracterizan el hiperplano, y el término afín se comporta como un offset o desplazamiento de la salida, y^r.

- La salida de un sistema TSK se calcula mediante la **suma ponderada o el promedio ponderado** del efecto individual de todas sus reglas.
    - La suma ponderada es la suma de los valores obtenidos por la función consecuente, ponderadas por el grado de activación de cada una de las reglas.
    - El promedio ponderado consiste en dividir la suma ponderada por el sumatorio de las fuerzas de activación de las reglas.

Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

- Estos métodos de agregación permiten, de forma sencilla, que las reglas que se cumplen en mayor grado afecten más a la salida del sistema que las que se cumplen con una menor calidad.
- Si la base de reglas está formada por R reglas y ω^r es el grado de cumplimiento de la regla r, la salida aplicando la suma ponderada o el promedio ponderado, se obtiene mediante la aplicación de las ecuaciones 15 ó 16, respectivamente.

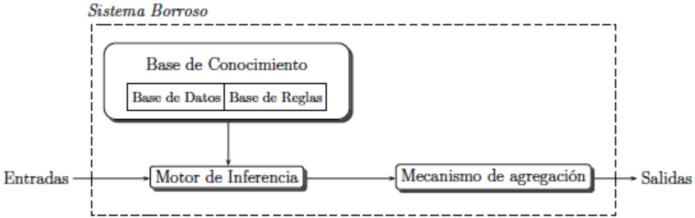
$$y = \sum_{r=1}^{R} \omega^r y^r \tag{15}$$

$$y = \frac{\sum_{r=1}^{R} \omega^r y^r}{\sum_{r=1}^{R} \omega^r} \tag{16}$$

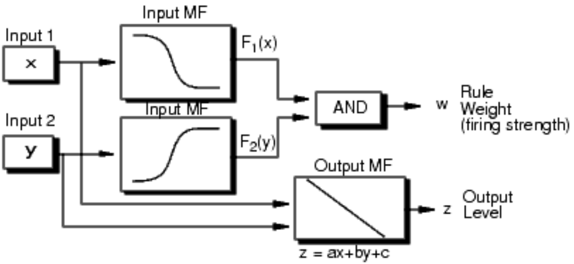
- El grado de cumplimiento de cada regla, ω^r, se obtiene mediante la aplicación de un operador de conjunción que se modela mediante una T-norma; normalmente la función mínimo o producto:

$$\omega^r = T\{A_1^r(x_1 1), A_2^r(x_2), \ldots, A_n^r(x_n)\}. \tag{17}$$

- Diagrama de bloques de un modelo TSK.

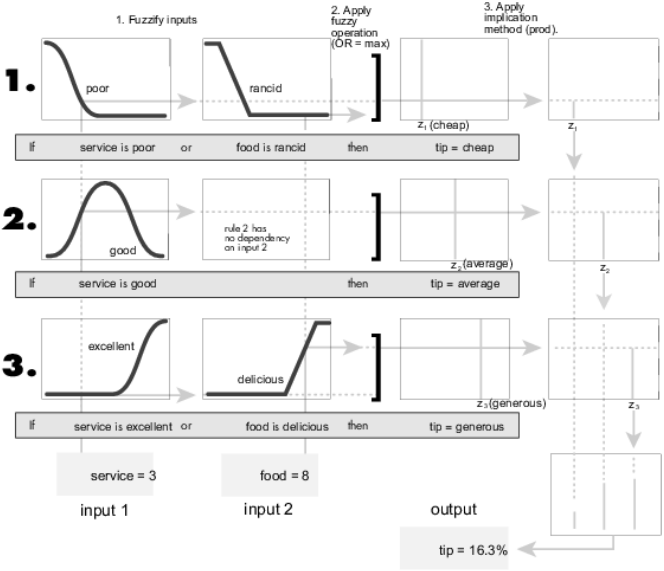


- Diagrama de una regla TSK.



Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Funcionamiento del sistema TSK



Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

- La estructura de un sistema borroso TSK es ligeramente distinta de la estructura vista en los sistemas anteriores.
  - Dispone como todo sistema borroso de un motor de inferencia y una base de conocimiento, pero como las entradas al sistema son siempre numéricas, y su efecto sobre las salidas se calcula directamente mediante la aplicación de las ecuaciones anteriores, no es necesario un borrosificador.
  - La salida de cada una de las reglas es un valor numérico, de forma que tampoco se requiere de desborrosificador para generar la salida global del sistema.
  - No obstante, es imprescindible algún mecanismo para agregar todas las conclusiones parciales de las reglas en una única salida. Para ello se utilizan la suma ponderada o el promedio ponderado.

Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Propiedades

- Los sistemas borrosos TSK son una muy útiles para el modelado de sistemas complejos y no lineales, ya que son aproximadores universales tanto de la función como de su derivada.
- Además, si se utiliza como consecuente un polinomio de orden 1 completo, es decir, con el término afín distinto de cero, un sistema TSK también puede aproximar de forma universal la 2 derivada de una función.
- La utilización en los sistemas TSK de un consecuente polinómico permite aproximar funciones con gran precisión y con un número mucho menor de reglas que los sistemas de tipo Mamdani.
- Este aumento de precisión se consigue a costa de empeorar la interpretabilidad de las reglas.
- Como los consecuentes funcionales empleados en los TSK son difíciles de definir por un experto, para la obtención de este tipo de modelos borrosos se suele recurrir a sistemas de aprendizaje, como los algoritmos basados en redes neuronales o los algoritmos bioinspirados (algoritmos genéticos, etc.).

Bibliografía

Piña, Antonio Javier Barragán. Síntesis de Sistemas de Control Borroso Estables por Diseño: Tésis Doctoral. A. Javier Barragán Piña, 2010.

- Fin L2