Control Inteligente

Fundamentos de la Lógica Fuzzy
L1

Luis Moreno, Santiago Garrido, Dorin Copaci

Dpto. Ing. de Sistemas y Automática
Universidad Carlos III
Madrid

Oct 2019

Table of contents

1 Fundamentos de la Lógica Fuzzy o Borrosa

Introducción

- La imprecisión y la incertidumbre pueden ser considerados como dos aspectos asociados de forma ineludible a la mayor parte de los fenómenos que nos rodean, y que tienen su origen en la complejidad de los mismos o/y en la imperfección de nuestra información sobre ellos.
- Cada elemento de información o item puede definirse por una cuaterna de elementos (**objeto, atributo, valor, confianza o certidumbre**).
    - El atributo es la función que asigna un valor o conjunto de valores a un objeto.
    - La confianza es una indicación de la fiabilidad del elemento de información.

- Es posible diferenciar entre el concepto de **imprecisión** y el de **incertidumbre**:
  - La **imprecisión** está relacionada con el contenido de un item o elemento de información (el componente *valor* de la cuaterna de elementos que componen el item de información).
  - La **incertidumbre** está relacionada con su verdad, entendida esta como su conformidad con la realidad (el componente *confianza* de la cuaterna de elementos que componen el item de información).

Elementos de información

- La incertidumbre de un elemento de información puede tratarse por medio de calificativos como *probable*, *posible*, *necesario*, *plausible* o *creíble* a los que es necesario dar un significado preciso. Es evidente que el concepto de **probabilidad** ha sido extensamente estudiado.
- Un elemento de información se dice que es **preciso** cuando el componente *valor* de dicho elemento no puede ser subdividido.
- La propiedad de ser *preciso* depende de la definición del dominio de referencia (de la granularidad del mismo, es decir de la elección de la unidad de medida).
    - Existen diferentes calificativos para referirnos a la imprecisión, asi tenemos: vago, borroso, general, difuso o ambiguo.
    - Por borroso, en un elemento de información, entendemos la ausencia de un límite claro en el conjunto de valores asociados a los objetos a los cuales se refiere.
    - La mayoría de los calificativos usados en el lenguaje convencional son borrosos.

Diferencia entre precisión e incertidumbre

- Dado un conjunto de items de información, la oposición entre los conceptos de precisión y de incertidumbre se expresa porque:
    - Al hacer más preciso el contenido de una proposición, se tiende a incrementar su incertidumbre.
    - De forma opuesta, el carácter impreciso de un cierto ítem de información confiere por lo general una cierta certidumbre a las conclusiones que se puedan derivar de él.

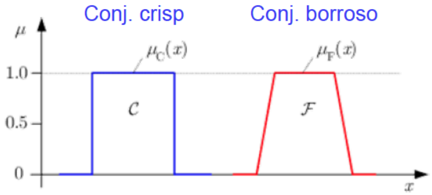
Origenes históricos

- El control borroso o fuzzy utiliza las técnicas de manipulación de información fuzzy iniciadas por Zadeh en los años 60 con la introducción del concepto de conjunto borroso y posterior desarrollo de la teoría de conjuntos borrosos.

Conjuntos borrosos

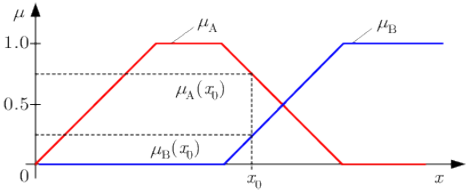
- En la teoría de conjuntos borrosos, a los conjuntos *normales* se les denomina conjuntos *crisp o precisos*, para diferenciarlos de los conjuntos *fuzzy o borrosos*.
- Si C es un conjunto preciso definido sobre un universo de discurso U, entonces para cualquier elemento u de U , o bien $u \in C$o bien $u \notin C$.
- En la teoría de conjuntos borrosos esta propiedad es generalizada, y la pertenencia de un elemento al conjunto borroso F no es la dicotomía $\in$ o $\notin$, sino que se define una función, denominada **función de pertenencia** que asigna a cada elemento u de U un valor en el intervalo $\{0,1\}$ que indica el **grado de pertenencia** de dicho elemento u al conjunto borroso F.
- Al conjunto definido sobre la base de esta función de pertenencia generalizada se le denomina **conjunto borroso**.

Conjuntos borrosos



Conjuntos borrosos

- **Def:** La función de pertenencia μ_F de un conjunto borroso F es una función
$$\mu_F : U \to [0,1]. \tag{1}$$
Con esta definición, todo elemento $u \in U$ tiene un **grado de pertenencia** $\mu_F(u) \in [0,1]$.
- El conjunto borroso F está completamente determinado por el conjunto de n-tuplas
$$F = \{(u, \mu_F(u)) \,|\, u \in U\}. \tag{2}$$



Conjuntos borrosos

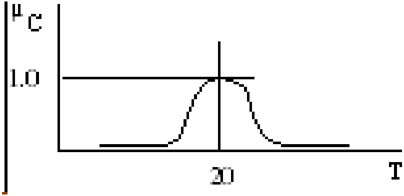
- *Ejemplos* :
  - Supongamos que queremos definir el conjunto borroso de los números ***naturales*** "próximos a 8". Esto se puede expresar por:

    $\tilde{8} = (5, 0{,}1) + (6, 0{,}2) + (7, 0{,}5) + (8, 1{,}0) + (9, 0{,}5) + (10, 0{,}2) + (11, 0{,}1)$

  - Si suponemos que lo que queremos representar es la función de pertenencia al conjunto borroso de temperaturas *confortables*, esta podría ser, por ejemplo,

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1 + (x - 20)^2}$$

que gráficamente



Conjuntos borrosos

- Una notación más conveniente para los conjuntos borrosos es la propuesta por Zadeh.
- Supongamos que C es un conjunto preciso (crisp) finito $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, una notación alternativa es $C = u_1 + u_2 + ... + u_n$ donde el símbolo $+$ indica enumeración.
- De forma similar el par $(u, \mu(u))$ podría denotarse como $\mu(u)/u$, donde / denota n-tupla.
  - Con esto el conjunto borroso F ,

$$F = \{(u, \mu_F(u))\,|u \in U\} \tag{3}$$

puede expresarse por:

$$\begin{aligned} F &= \mu_F(u_1)/u_1 + \mu_F(u_2)/u_2 + ... + \mu_F(u_n)/u_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_F(u_i)/u_i \end{aligned} \tag{4}$$

y en el caso de conjuntos continuos,

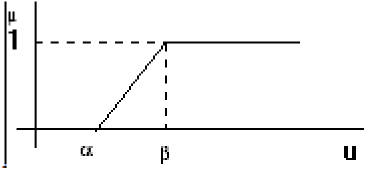
$$F = \int_U \mu_F(u)/u \tag{5}$$

Funciones de pertenencia típicas:

Gamma

- **Def:** La función $\Gamma : u \rightarrow [0,1]$ es una función de dos parámetros definida como

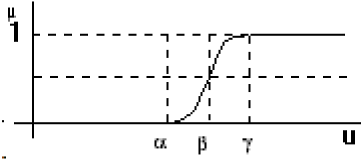
$$\Gamma(u;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } u < \alpha \\ \frac{(u-\alpha)}{(\beta-\alpha)} & \text{if } \alpha \leq u \leq \beta \\ 1 & \text{if } u > \beta \end{cases} \tag{6}$$



Funciones de pertenencia típicas: S

- **Def:** La función $S : u \rightarrow [0,1]$, debida a Zadeh, es una función no lineal de tres parámetros definida como

$$S(u;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq \alpha \\ 2\left(\frac{(u-\alpha)}{(\beta-\alpha)}\right)^2 & \text{if } \alpha < u \leq \beta \\ 1 - 2\left(\frac{(u-\beta)}{(\gamma-\beta)}\right)^2 & \text{if } \beta < u \leq \gamma \\ 1 & \text{if } u > \beta \end{cases} \quad (7)$$

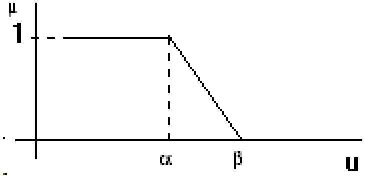


Funciones de pertenencia típicas:

L

- **Def:** La función $L : u \to [0,1]$ es una función de dos parámetros definida como

$$L(u;\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{if } u < \alpha \\ 1 - \frac{(\alpha-u)}{(\alpha-\beta)} & \text{if } \alpha \le u \le \beta \\ 0 & \text{if } u > \beta \end{cases} \tag{8}$$

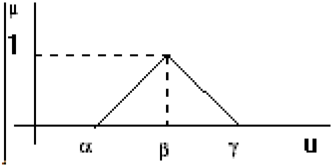


Funciones de pertenencia típicas:

Lambda

- **Def:** La función $\Lambda : u \to [0,1]$ es una función de tres parámetros definida como

$$\Lambda(u;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq \alpha \\ \frac{(u-\alpha)}{(\beta-\alpha)} & \text{if } \alpha \leq u \leq \beta \\ 1 - \frac{(\beta-u)}{(\beta-\gamma)} & \text{if } \beta \leq u \leq \gamma \\ 0 & \text{if } u > \gamma \end{cases} \tag{9}$$

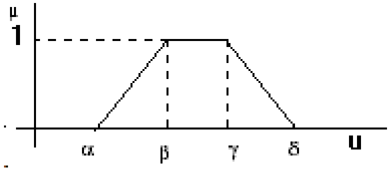


Funciones de pertenencia típicas:

Pi

- **Def:** La función $\Pi : u \rightarrow [0,1]$ es una función de cuatro parámetros definida como

$$\Pi(u;\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq \alpha \\ \frac{(u-\alpha)}{(\beta-\alpha)} & \text{if } \alpha \leq u < \beta \\ 1 & \text{if } \beta \leq u \leq \gamma \\ 1 - \frac{(\gamma-u)}{(\gamma-\delta)} & \text{if } \gamma < u \leq \delta \\ 0 & \text{if } u > \delta \end{cases} \tag{10}$$



Funciones de pertenencia

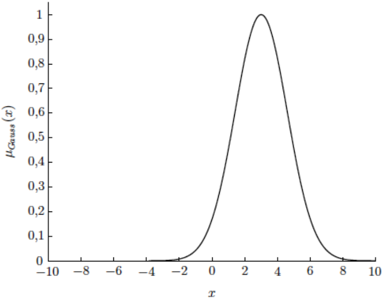
- Esta función puede utilizarse para describir las anteriores ya que, si suponemos que el dominio va de [-6,6], podríamos hacer

$$\begin{array}{l} \Gamma\left(x;\alpha,\beta\right)=\Pi\left(x;\alpha,\beta,6,6\right) \\ L\left(x;\gamma,\delta\right)=\Pi\left(x;-6,-6,\gamma,\delta\right) \\ \Lambda\left(x;\alpha,\beta,\gamma\right)=\Pi\left(x;\alpha,\beta,\beta,\delta\right) \end{array} \tag{11}$$

- **Def:** Una función de pertenencia gaussiana, $Gauss(x; c, \beta)$, se define según la expresión,

$$\mu_{Gauss}(x; c, \beta) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\beta^2}} \tag{12}$$

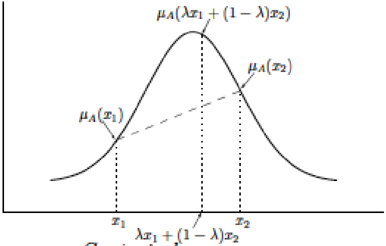
siendo c su centro y $\beta > 0$ el ancho de la función de pertenencia.



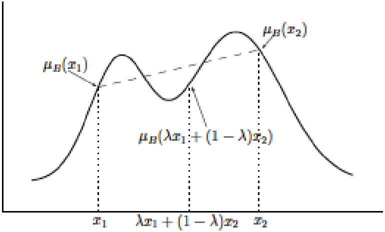
- **Def**: (*Conjunto borroso normalizado*). Sea A un conjunto borroso definido en X, se dice que A es un conjunto borroso normalizado si y sólo si $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. Dado que un grado de pertenencia mayor de uno no tiene mucho sentido lógico, normalmente siempre se emplean conjuntos borrosos normalizados.
- **Def**: (*Conjunto borroso nulo o vacío*). Sea A un conjunto borroso definido en X, se dice que A es un conjunto borroso nulo o vacío, $A = \emptyset$, si y sólo si $\mu_A(x) = 0, \forall x \in X$. Es decir, A es un conjunto borroso nulo si no existe ningún elemento cuyo grado de pertenencia al conjunto sea distinto de cero.
- **Def**: (*Conjunto borroso normal*). Sea A un conjunto borroso definido en X, se dice que A es un conjunto borroso normal, si y sólo si existe al menos un $x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$. En caso contrario, se dice que A es un conjunto borroso no-normal.

- **Def**: (*Conjunto borroso convexo*). Sea A un conjunto borroso definido en X, se dice que A es un conjunto borroso convexo si y sólo si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2, y cualquier $\lambda \in [0, 1]$, se verifica la ecuación:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \qquad (13)$$



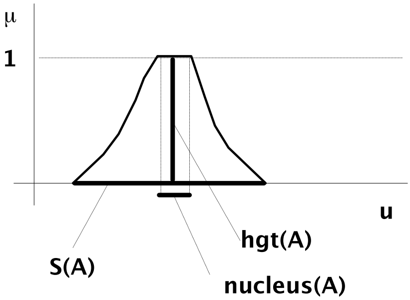
Conjunto borroso convexo.



Conjunto borroso no convexo.

- **Def**: (*Soporte de un conjunto borroso*). Sea A un conjunto borroso definido en X, el soporte de A, denotado por $Sop(A)$ o por $sup(A)$, es el subconjunto de X cuyos elementos tienen un grado de pertenencia distinto de cero en A.

$$Sop(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}. \quad (14)$$



- Cuando se utilizan funciones de pertenencia asintóticas, como la gaussiana, esta definición no resulta práctica, ya que el soporte de dichas funciones es infinito. Para limitar el soporte de funciones asintóticas a un conjunto finito de elementos, se suele modificar la definición anterior por la siguiente.

$$Sop(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > \gamma, \gamma > 0\}. \tag{15}$$

  Si se elije γ un valor positivo cercano a cero, se eliminan del soporte aquellos elementos cuya calidad de pertenencia al conjunto es muy baja, consiguiendo a la vez un soporte finito y representativo del conjunto.

- **Def**: (*Núcleo de un conjunto borroso*). Sea A un conjunto borroso definido en X, el núcleo de A, denotado por $nuc(A)$, es el subconjunto de X cuyos elementos tienen grado de pertenencia uno en A.

  $$nuc(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\} \tag{16}$$

  Si A es un conjunto borroso convexo, su núcleo también es convexo.
- **Def**: (*Frontera de un conjunto borroso*). Sea A un conjunto borroso definido en X, la frontera de A es el subconjunto de X cuyos elementos tienen grados de pertenencia en A comprendidos entre cero y uno.
- **Def**: (*Peso o altura de un conjunto borroso*). Sea A un conjunto borroso definido en X, el peso o altura de A es el máximo valor de la función de pertenencia μ_A. Si A es un conjunto borroso normal (y normalizado), su peso será 1.

- **Def**: (*Número borroso*). Un número borroso A es un conjunto borroso definido en $\mathcal{R}$, normal y convexo, cuya función de pertenencia es continua y su soporte limitado. Si el soporte no es limitado, pero se cumple la condición de límite dada por la ecuación

$$lim_{|x| \to \infty} A(x) = 0 \tag{17}$$

también se puede decir que A es un número borroso o, más exactamente, cuasi-borroso.

  - Los números borrosos son conjuntos borrosos con un claro significado cuantitativo, en la medida en que clasifican un concepto alrededor de un número o intervalo de números.
  - Estos números tienen una gran importancia en el control borroso, ya que permiten representar valores numéricos mediante la imprecisión propia de la lógica borrosa.

Operaciones sobre conjuntos borrosos

- Las operaciónes básicas que se definen sobre los conjuntos borrosos son las mismas que en la teoría clásica de conjuntos: igualdad, inclusión, unión, intersección y complementación.
  - **Def:** [*igualdad*] Dos conjuntos borrosos son iguales , $A{=}B$, si y sólo si

$$\forall x \in S : \mu_A(x) = \mu_B(x). \tag{18}$$

  - **Def:** [*inclusión*] A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$, si y sólo si

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x). \tag{19}$$

Operaciones sobre conjuntos borrosos

- En la teoría de conjuntos clásica las operaciónes de unión, intersección y complementación son operaciones simples y definidas sin ambigüedad.
- No ocurre lo mismo en la teoría de conjuntos borrosos. Zadeh propuso que estas operaciones se definieran de la siguiente forma (existen otras definiciónes posibles para estas operaciones):
  - **Def:** La intersección de dos conjuntos borrosos A y B , $A \cap B$, se define como

$$\forall x \in X : \mu_{A \cap B}(x) = min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right). \tag{20}$$

  - **Def:** La *unión* de dos conjuntos borrosos A y B , $A \cup B$, se define como

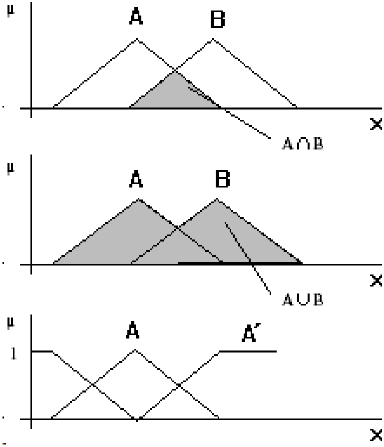
$$\forall x \in X : \mu_{A \cup B}(x) = max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right). \tag{21}$$

  - **Def:** El conjunto borroso *complementario* de un conjunto borroso A, A', se define como

$$\forall x \in X : \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{22}$$

Operaciones sobre conjuntos borrosos

- Las operaciones anteriores se muestran gráficamente en la siguiente figura:



Propiedades

- Los conjuntos borrosos y las operaciones de unión, intersección y complemento cumplen las propiedades básicas de sus equivalentes clásicos:
  - Idempotencia:

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \qquad (23)$$

  - Identidad:

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \quad \mathrm{y, si} \quad A \subset X, A \cap X = A \\ A \cap \emptyset &= \emptyset \quad \mathrm{y, si} \quad A \subset X, A \cup X = X \end{aligned} \qquad (24)$$

  - Transitividad:

$$\mathrm{Si} \quad A \subset B \subset C, \quad \mathrm{entonces} \quad A \subset C \qquad (25)$$

Propiedades

- Cont.:
  - **Involución**:
$$A'' = A \tag{26}$$
  - **Propiedad conmutativa**:
$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \tag{27}$$
  - **Propiedad asociativa**:
$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned} \tag{28}$$

Propiedades

- Con las operaciones y propiedades básicas estudiadas es posible extender a los conjuntos borrosos muchas de las identidades válidas para los conjuntos clásicos.
    - Se puede comprobar que en la teoría de conjuntos borrosos se cumplen las **leyes de De Morgan** dadas por

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned} \tag{29}$$

      si se consideran los operadores clásicos de unión, intersección y negación propuestos inicialmente por L. Zadeh (operador máximo, mínimo, y complemento a uno respectivamente).
    - Igualmente, bajo las mismas suposiciones, también se cumplen las **leyes distributivas**

$$\begin{aligned} C \cap (A \cup B) &= (C \cap A) \cup (C \cap B) \\ C \cup (A \cap B) &= (C \cup A) \cap (C \cup B) \end{aligned} \tag{30}$$

- Las funciones lógicas vista fueron propuestas por el profesor Zadeh en el desarrollo inicial de la teoría de conjuntos borrosos. Sin embargo estas funciones pueden ser sustituidas por otras siempre y cuando cumplan determinadas condiciones.
- A estas funciones que generalizan las operaciones de intersección y unión, derivadas de los conceptos presentados por Menger y Schwizer y Sklar se las conoce como **normas y conormas triangulares** respectivamente.
- Además de la función mínimo, existen otros operadores que implementan dicha función, conocidos como **normas triangulares o T-normas**.

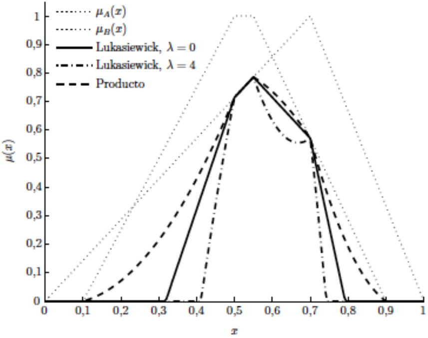
T-normas

- **Def**: (*Normas triangulares o T-normas*). Una norma triangular, o T-norma, es una aplicación $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que cumple las propiedades **conmutativa, asociativa, de monotonicidad e identidad unitaria** (o condición de frontera).
  - Las T-normas representan un modelo genérico para la intersección lógica (operador lógico Y o AND).
  - Las propiedades conmutativa y asociativa ya se han visto.
  - Dados dos pares de valores $x \leqslant y, w \leqslant z$, la propiedad de **monotonicidad** exige que se cumpla que $T(x, w) \leqslant T(y, z)$.
  - La **condición de frontera** que debe cumplir una función para que pueda considerarse como norma triangular (T-norma) es que sea de identidad unitaria, es decir, que $T(x, 1) = x$, para todo $x \in [0, 1]$.
  - Para que una función pueda considerarse T-norma debe cumplir la propiedad asociativa (esta exigencia permite extender las T-normas a más de dos argumentos).
  - Como deben cumplir la propiedad conmutativa, el orden de aplicación de las T-normas no afecta al resultado final.

- T-normas principales:
  - Mínimo (estándar): $T(x,y) = \min\{x,y\}$.
  - Producto: $T(x,y) = xy$.
  - Producto drástico: $T(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} & \text{si } \max\ \{x,y\} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
  - Producto acotado (Lukasiewicz): $T(x,y) = \max\{0, (1+\lambda)(x+y-1) - \lambda xy\}, \lambda \geqslant -1$.
  - Hamacher: $T(x,y) = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)}, \lambda \geqslant 0$.
  - Yager: $T(x,y) = 1 - \min\{1, \sqrt[\lambda]{(1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda}\}, \lambda \geqslant 0$.
  - Dubois-Prade: $T(x,y) = \frac{xy}{\max\{x,y,\alpha\}}, \alpha \in (0,1)$.
  - Frank: $T(x,y) = \log_\lambda \left\{1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1}, \lambda > 0, \lambda \neq 1\right\}$
  - Producto de Einstein: $T(x,y) = \frac{xy}{1+(1-x)+(1-y)}$

T-normas

- Ejemplo:
  - T-normas producto y producto acotado.



S-normas

Igual que con la intersección, la unión borrosa puede definirse mediante otras funciones distintas al máximo (son las T-conormas o S-normas).

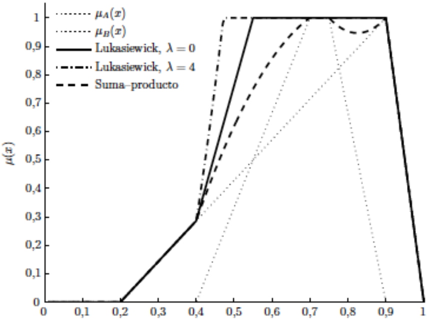
- **Def**: (*T-conorma o S-norma*). Una conorma triangular, también llamada T-conorma o S-norma, es una aplicación $S : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ que cumple las propiedades conmutativa, asociativa, de monotonicidad e identidad cero (o condición de frontera).
    - Las S-normas representan un modelo genérico para la unión lógica (operador lógico O u OR).
    - La condición de frontera que debe cumplir una función para que pueda considerarse como conorma triangular (S-norma) es que sea de identidad cero, es decir, que $S(x,0) = x, \quad \forall x \in [0,1]$.
    - Al igual que sucede con las T-normas, las S-normas o T-conormas pueden extenderse a más de dos argumentos empleando su asociatividad, sin importar su orden de aplicación (conmutatividad).

S-normas

Principales

- S-normas principales:
  - Máximo (estándar): $T(x, y) = \max\{x, y\}$.
  - Suma-Producto: $T(x, y) = x + y - xy$.
  - Suma drástica: $T(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \text{si } \min\ \{x, y\} = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
  - Suma acotada (Lukasiewicz):
    $T(x, y) = \min\{1, (x + y + \lambda xy)\}, \lambda \geqslant 0$.
  - Hamacher: $T(x, y) = \frac{x+y-(2-\lambda)xy}{1-(1-\lambda)(xy)}, \lambda \geqslant 0$.
  - Yager: $T(x, y) = 1 - \min\{1, \sqrt[\lambda]{x^\lambda + y^\lambda}\}, \lambda \geqslant 0$.
  - Dubois-Prade: $T(x, y) = 1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max\{(1-x),(1-y),\alpha\}}, \alpha \in [0, 1]$.
  - Frank: $T(x, y) = \log_\lambda \left\{1 + \frac{(\lambda^{(}1-x)-1)(\lambda^{(}1-y)-1)}{\lambda-1}, \lambda > 0, \lambda \neq 1\right\}$

- Ejemplo:
  - S-normas suma-producto y suma acotada.



S-normas

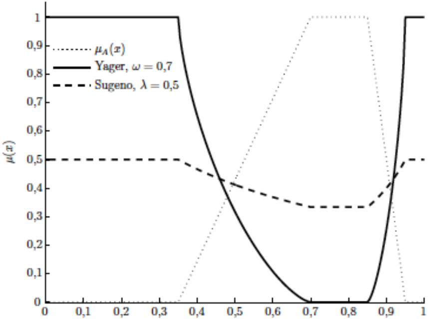
- - Para cada T-norma existe una S-norma dual o conjugada y viceversa. Así para una T-norma, $T(x, y)$, su S-norma conjugada es: $S(x, y) = 1 - T((1 - x), (1 - y))$.
  - Aunque las T-normas y S-normas no pueden ordenarse, sí que puede identificarse claramente la mayor y menor de ellas. Así, la mayor de las T-normas es la función mínimo y la menor el producto drástico.
  - En el caso de las S-normas, la mayor es la suma drástica, y la menor la función máximo.
  - El resto de T-normas y S-normas están comprendidas entre éstas.
  - Con respecto a las propiedades que cumplen las T-normas y S-normas, en general se puede decir que estas operaciones no satisfacen las propiedades de contradicción ni exclusión del medio, a excepción de la familia de Lukasiewicz con $\lambda = 0$.
  - Las propiedades de idempotencia y la propiedad distributiva sólo se cumplen en el caso de los operadores estándar, es decir, si se emplean el máximo y el mínimo como operadores de unión e intersección, respectivamente.

Igual que con las operaciones de unión e intersección, el operador de negación también se puede definir de forma distinta a su definición original.

- **Def**: (*Operador de negación*). Una función de negación es una aplicación $N : [0,1] \to [0,1]$ continua, monótona no creciente, involutiva, es decir, $N(N(x)) = x$, para todo $x \in X$, y que cumple las condiciones de frontera $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$.
- Definiciones principales:
    - Estándar: $N(x) = 1 - x$.
    - Umbral: $N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $0^2 \lambda < 1$
    - Sugeno: $N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \lambda > -1$.
    - Yager: $N(x) = \sqrt[\omega]{(1 - x^{\omega})}, \omega > 0$.

Operadores de negación

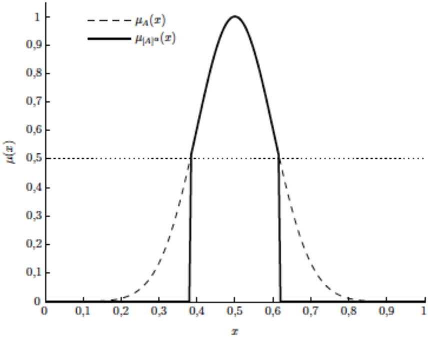
- Ejemplo:
  - Operadores de negación de Yager y Sugeno.



Otras operaciones borrosas

- **Def**: (α-corte). Sea A un conjunto borroso, cuya función de pertenencia es $\mu_A(x)$, el α-corte de A es un conjunto borroso que se denota por $[A]^\alpha$ y se define según

$$[A]^\alpha = x \in X|\mu_A(x) > \alpha, \alpha > 0. \tag{31}$$



Otras operaciones borrosas

- **Def**: (*Concentración y dilatación*). Sea A un conjunto borroso cuya función de pertenencia es $\mu_A(x)$, entonces A^k, con $k \in \mathbb{R}+$, denota la operación de concentración si $k > 1$ o de dilatación si $k \in (0, 1)$. La función de pertenencia del conjunto borroso concentrado o dilatado se obtiene mediante:

$$\mu_{A^k} = \mu_A(x)^k. \tag{32}$$

  - Normalmente se utiliza $k = 2$ para la operación de concentración y $k = 0{,}5$ para la dilatación.

- **Def**: (*Producto algebraico*). El producto algebraico de dos conjuntos borrosos A y B, cuyas funciones de pertenencia son $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, respectivamente, se denota por AB y se define mediante:

$$\mu_{(AB)}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{33}$$

  El conjunto borroso AB cumple $AB \subset A \cap B$.

Otras operaciones borrosas

- **Def**: (*Suma algebraica*). La suma algebraica de dos conjuntos borrosos A y B, cuyas funciones de pertenencia son $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, respectivamente, se denota por $A + B$ y se define mediante

$$\mu_{(A+B)}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) \tag{34}$$

  - Si A y B son conjuntos borrosos normalizados, el conjunto borroso obtenido mediante la suma algebraica de A y B sólo será normalizado si $\mu_A(x) + \mu_B(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$, es decir, a diferencia del producto algebraico, la suma algebraica de dos conjuntos borrosos sólo tendrá sentido si $\mu_{(A+B)} \leqslant 1$ para todo $x \in X$.

Otras operaciones borrosas

- **Def**: (*Suma*). La suma de dos conjuntos borrosos A y B, cuyas funciones de pertenencia son $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, respectivamente, se denota $A \oplus B$ y se define mediante la ecuación:

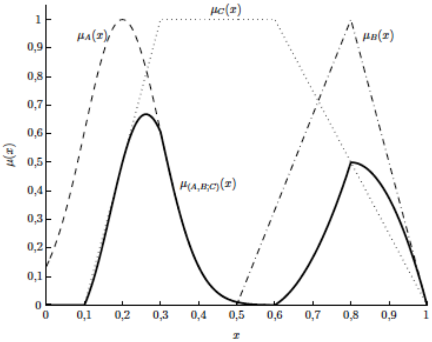
$$\begin{aligned}(A \oplus B) &= A + B - AB \\ \mu_{(A \oplus B)}(x) &= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \ \forall x \in X \quad (35)\end{aligned}$$

  - Si A y B son conjuntos borrosos normalizados, el conjunto borroso $A \oplus B$ será normalizado en todo caso, por lo que la operación suma sí tiene sentido en todo el universo de discurso de los conjuntos A y B.
  - Observación: el producto algebraico es una T-norma, por lo que es equivalente a la operación de intersección borrosa, sin embargo la suma algebraica no es una T-conorma, por lo que no sería la operación dual del producto algebraico. En lógica borrosa, la operación dual del producto algebraico es la suma, ya que ésta si es equivalente a la operación unión (es una S-norma).

Otras operaciones borrosas

- **Def**: (Combinación convexa). La combinación convexa de dos conjuntos borrosos A y B, con funciones de pertenencia son $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, a través de un tercer conjunto borroso C, con función de pertenencia $\mu_C(x)$, se denota por $(A, B; C)$, y se define como:

$$\begin{aligned}(A, B; C) &= CA + CB \\ \mu_{(A,B;C)}(x) &= \mu_C(x)\mu_A(x) + (1 - \mu_C(x))\mu_B(x), \ \forall x \in X \quad (36)\end{aligned}$$



Otras operaciones borrosas

- La combinación convexa de A y B mediante un conjunto borroso C es un conjunto borroso intermedio entre la unión y la intersección de los conjuntos A y B; es decir verifica que:

$$A \cap B \subset (A, B; C) \subset A \cup B, \forall C \tag{37}$$

Relaciones borrosas

- Una relación *precisa* o crisp representa:
  - La presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre los elementos de dos o más conjuntos.
  - Una relación puede ser considerada como un conjunto de n-tuplas, donde una tupla es un par ordenado. Una n-tupla binaria se denota como (x, y), una n-tupla ternaria es (x, y, z), y una de orden $n$sería $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
  - El *producto cartesiano* es una relación binaria, que para el caso de dos conjuntos precisos o crisp, X e Y , se denota por XxY, y se define formalmente como

$$X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\} \tag{38}$$

- El producto cartesiano puede generalizarse para una familia de conjuntos precisos o crisp $\{X_i | i \in \mathrm{N}, i \leqslant n\}$ y se define como

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X_i, \forall i \in \mathrm{N}, i \leqslant n\} \tag{39}$$

- Una *relación* entre conjuntos precisos o crisp $X_1, \ldots, X_n$ es un subconjunto del producto cartesiano $\times_{i=1}^{n} X_i$. Se denota como $R(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, y

$$R(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \tag{40}$$

- Como una relación es en sí misma un conjunto, los conceptos básicos de conjuntos tales como subconjunto, unión, intersección y complementación pueden ser aplicados a una relación sin ninguna modificación.

- Una *relación borrosa* es un conjunto borroso definido sobre el producto cartesiano de conjuntos precisos o crisp $X_1, \ldots, X_n$ donde las n-tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ pueden tener grados de pertenencia que varían con la relación.
- **Def:** Sean U y V dos universos de discurso continuos, y $\mu_R : UxV \to [0, 1]$, la función característica que define el grado de pertenencia de una n-tupla a la relación R, entonces

$$R = \int_{UxV} \mu_R(u, v)/(u, v) \tag{41}$$

es una relación borrosa binaria sobre UxV.

  - En el caso de que U y V sean universos de discurso discretos, entonces

$$R = \sum_{UxV} \mu_R(u, v)/(u, v) \tag{42}$$

Operaciones con relaciones borrosas

- Las relaciones borrosas tienen gran importancia en control ya que permiten describir interacciones entre variables (mediante reglas **<if-then>.**
- **Def:** (*Intersección*) Sean R y S dos relaciones binarias definidas sobre XxY. La **intersección** de R y S se define como

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cap S}(x, y) = min\left(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right). \quad (43)$$

- **Def:** (*Unión*) Sean R y S dos relaciones binarias definidas sobre XxY. La **unión** de R y S se define como

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cup S}(x, y) = max\left(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right). \quad (44)$$

Operaciones con relaciones borrosas

- Dos operaciones muy importantes sobre conjuntos borrosos y relaciones borrosas son las denominadas **proyección** y **extensión cilíndrica**.
  - La operación de proyección convierte una relación ternaria en una binaria, o una binaria en un conjunto borroso, o un conjunto borroso en un valor preciso.
  - La extensión cilíndrica es lo opuesto a la proyección , es decir extiende los conjuntos borrosos a relaciones binarias borrosas, las relaciones binarias borrosas en relaciones ternarias borrosas, etc.

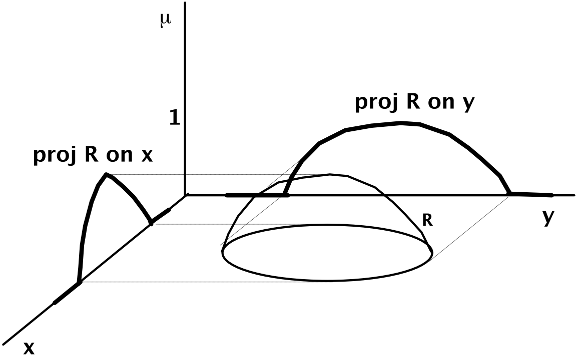
- Sea R una relación sobre $U = \mathrm{X}_{i=1}^{n} U_i$. Sea $(i_1, \ldots, i_k)$ una subsecuencia de $(1, \ldots, n)$, y sea $(j_1, \ldots, j_l)$ la subsecuencia complementaria de $(1, \ldots, n)$. Sea además $V = \mathrm{X}_{m=1}^{k} V_{i_m}$.
- **Def:** La **proyección** de R sobre V se define como

$$proj\,R\,on\,\mathrm{V} = \int_V \sup_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}} \mu_R(x_1, \ldots, x_n)/(x_1, \ldots, x_{i_k}). \qquad (45)$$

En el caso binario esta operación es muy simple (supongamos que R está definida sobre XxY):

$$proj\,R\,on\,\mathrm{Y} = \int_Y \sup_x \mu_R(x, y)/y \qquad (46)$$

- Interpretación gráfica



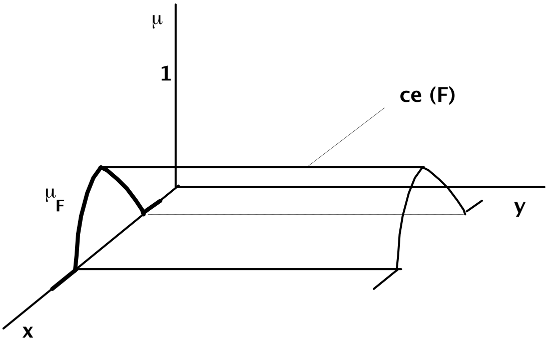
- **Def:** La **extensión cilíndrica** de Sen U se define como

$$ce(S) = \int_U \mu_S\,(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})/(x_1, \ldots, x_n). \tag{47}$$

En el caso binario esta operación es muy simple (supongamos que F es un conjunto fuzzy definido sobre Y), la extensión cilindrica de F sobre XxY es el conjunto de n_tuplas $(x, y) \in X$xY con grado de pertenencia igual a μ_F, es decir:

$$ce(F) = \int_{X \times Y} \mu_F\,(y)/(x, y). \tag{48}$$

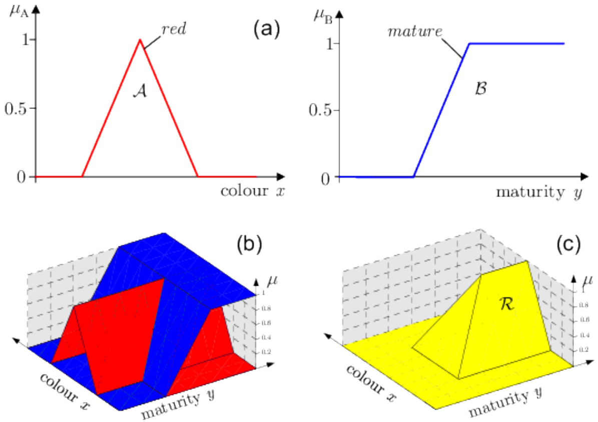
- Interpretación gráfica



Operaciones con relaciones borrosas

Ejemplo

- $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$, $ce_y(A(x)) = ce_A(x,y)$, $ce_x(B(y)) = ce_B(x,y)$ y $R = ce_A(x,y) \cap ce_B(x,y)$.



Composición

A la combinación de conjuntos borrosos con relaciones borrosas con la ayuda de la extensión cilíndrica y de la proyección se le denomina **composición**. Y se denota por $\circ$.

- **Def:** (Composición) Sea A un conjunto borroso definido sobre X y R una relación borrosa definida sobre XxY. Entonces la **composición** de A y R que da como resultado un conjunto borroso B definido sobre Y se obtiene como:

$$B = A \circ R = proj\,(ce(A) \cap R)\,onY \tag{49}$$

  - Si la intersección se realiza con la operación máximo y la proyección con el mínimo,

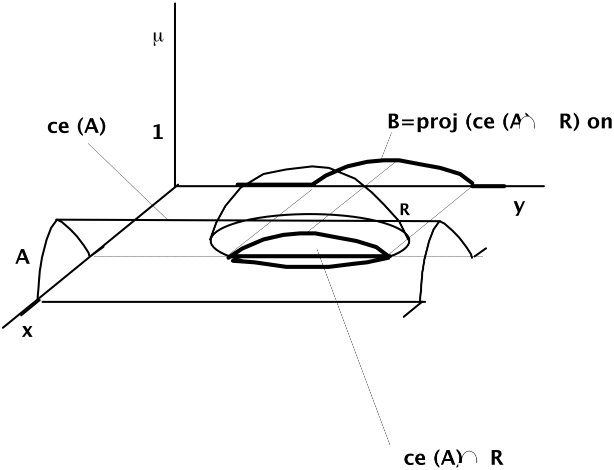
$$\mu_B(y) = \max_x min\,(\mu_A(x), \mu_R(x, y))\,. \tag{50}$$

    a esta composición se le denomina *max-min*. Si la operación de intersección se realiza con máximo y la proyección con producto, tenemos

$$\mu_B(y) = \max_x\,(\mu_A(x).\mu_R(x, y)) \tag{51}$$

    que se denomina composición *max-dot o max-producto*.

- Interpretación gráfica



El principio de Extensión

- Una de las nociones de más importancia en la teoría de conjuntos borrosos es el denominado **principio de extensión**.
- Este principio de extensión nos da un método general para combinar conceptos borrosos y no-borrosos de cualquier clase,
  - por ejemplo, para combinar conjuntos borrosos y relaciones,
  - pero también para las operaciones de una función matemática sobre conjuntos borrosos.
- Los conjuntos borrosos pueden ser interpretados como números borrosos. En este caso puede usarse el principio de extensión para sumar o multiplicar estos números.

El principio de Extensión

- Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos borrosos, definidos sobre $U_1, \ldots, U_n$, y sea f una función no borrosa $f : U_1 \times \ldots \times U_n \rightarrow V$. El propósito es extender f de forma que opere sobre $A_1, \ldots, A_n$ y devuelva un conjunto borroso F sobre V.
- Esto se realiza utilizando la operación de composición sup-min de la siguiente forma:
- **Def:** La extensión de f, operando sobre $A_1, \ldots, A_n$ da como resultado la siguiente función de pertenencia para F

$$\mu_F(v) = \sup_{\substack{u_1, \ldots, u_n \\ f(u_1, \ldots, u_n) = v}} min\{\mu_{A_1}(u_1), \ldots, \mu_{A_n}(u_n)\} \qquad (52)$$

cuando $f^{-1}(v)$ existe. En cualquier otro caso $\mu_A(v) = 0$.

El principio de Extensión

- En el caso binario y sobre dominios compactos o discretos, la expresión anterior podría formularse como

$$\mu_{f(A_1,A_2)}(y) = \max_{\substack{x_1, x_2 \\ y = f(x_1, x_2)}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \qquad (53)$$

- Con esto podemos extender el dominio de los números reales al dominio de los números borrosos.
- Dado que en control fuzzy los dominios son discretos o compactos, es posible casi siempre utilizar la composición max-min en vez de la sup-min.

Bibliografía

Piña, Antonio Javier Barragán. Síntesis de Sistemas de Control Borroso Estables por Diseño: Tésis Doctoral. A. Javier Barragán Piña, 2010.

- Fin L1