

Capítulo 5:

Circuitos pasivos recíprocos de microondas

Este capítulo es continuación natural del anterior: una vez se ha descrito la herramienta necesaria para analizar circuitos de microondas se pasa a la descripción de distintos circuitos pasivos recíprocos de microondas. Se analizarán y diseñarán uniones de dos guías, de tres guías (divisores de potencia donde se diseñará un divisor Wilkinson), de cuatro guías (análisis y diseño de acopladores direccionales: branch line, rat-race y tecnología de líneas acopladas).



ÍNDICE (I)

- Uniones de dos guías
 - Propiedades de la matriz de dispersión de un cuadripolo
 - Cierre de un cuadripolo por su impedancia característica o distinta de la característica.
 - Matriz de transmisión.
 - Transformación de parámetros en cuadripolos
- Uniones de tres guías: divisores y combinadores de potencia
 - Definiciones de T plano H y plano E: propiedades de la matriz de dispersión.
 - Teoremas referentes a una unión de tres guías: cierre de una unión de tres guías.
 - Diseño de divisores sin pérdidas y con pérdidas.
 - Análisis y diseño de un divisor Wilkinson equilibrado: análisis en modo par-impar.
 - Divisor de potencia Wilkinson desequilibrado.



ÍNDICE (II)

- Uniones de cuatro guías: acopladores direccionales
 - Matriz de dispersión de un acoplador direccional: teoremas.
 - Definiciones: coeficientes de transmisión, acoplo y aislamiento.
 - Análisis y diseño de acopladores direccionales: acopladores de 90° (branch-line), T-mágica (rat-race), acopladores basados en líneas acopladas.



Uniones de dos guías

- Se supone la red pasiva, lineal y recíproca.
- Unión pasiva ($\text{Re}(Z)$ semidefinida positiva)

$$r_{11} \geq 0; r_{22} \geq 0; \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow r_{11} \cdot r_{22} \geq r_{12} \cdot r_{21}$$

– No disipativa: $\text{Re}(Z)=0 \rightarrow Z = j \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

- Desde el punto de vista de matriz de dispersión:

– Unión pasiva $P \geq 0; \Rightarrow (\Delta - S^H \cdot S) \text{ real}$

– Unión no disipativa $(\Delta - S^H \cdot S) = 0 \Rightarrow \Delta = S^H \cdot S \Rightarrow$

Producto de filas por columnas

– Para un cuadripolo:

Restando las dos primeras ecuaciones

Si el cuadripolo está adaptado desde

resulta

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N s_{ki} \cdot s_{ki}^* = 1 \\ \sum_{k=1}^N s_{ki} \cdot s_{kj}^* = 0 (i \neq j) \end{cases}$$

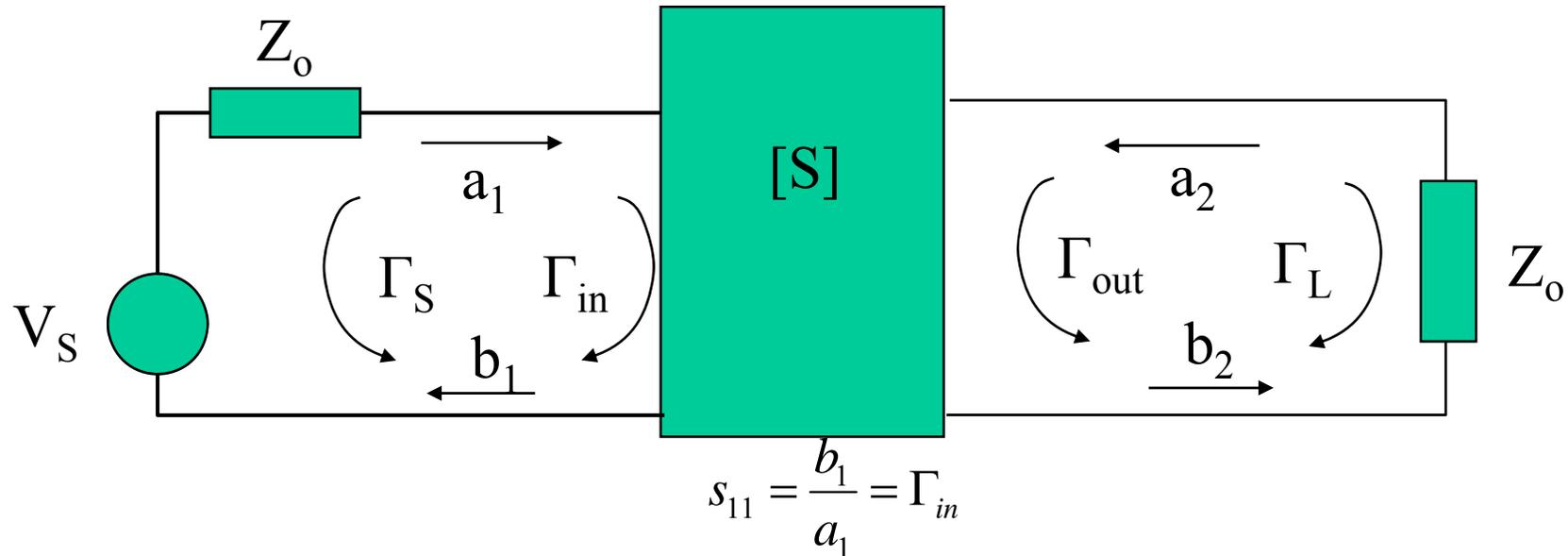
$$\begin{cases} s_{11} \cdot s_{11}^* + s_{21} \cdot s_{21}^* = 1 \\ s_{12} \cdot s_{12}^* + s_{22} \cdot s_{22}^* = 1 \\ s_{11} \cdot s_{12}^* + s_{21} \cdot s_{22}^* = 0 \end{cases}$$

- Si un cuadripolo no disipativo está adaptado desde una de sus guías, está completamente adaptado



Relaciones de potencia en un cuadripolo (I)

- Caso 1: Cuadripolo acabado en su impedancia características Z_0



$$|s_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{\text{Potencia entregada carga}}{\text{Potencia disponible generador}} = G_T$$

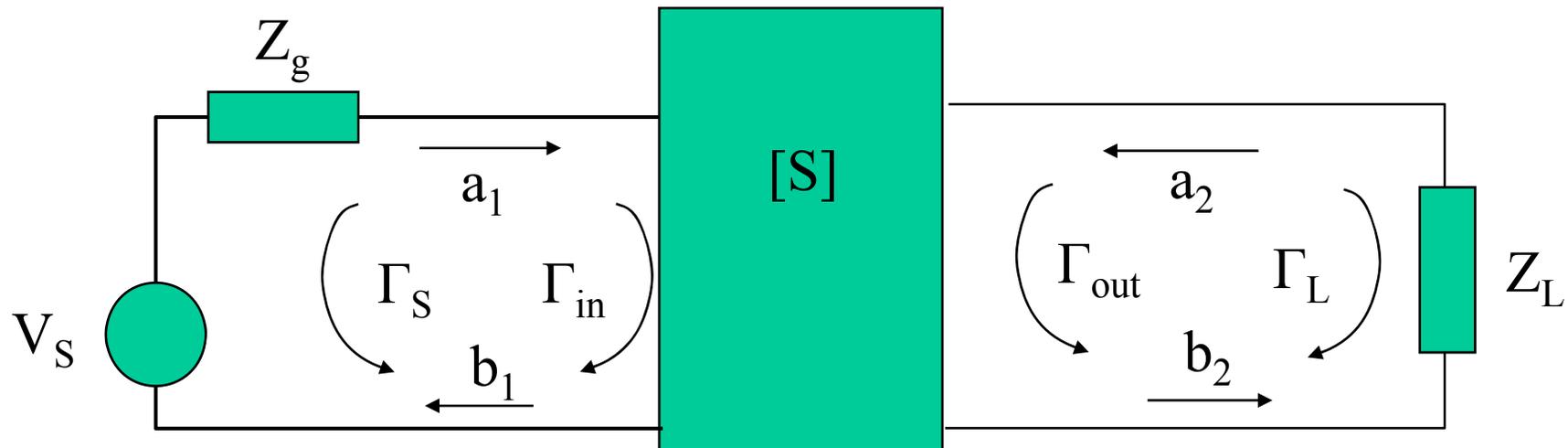
- Concepto de ganancia de potencia:

$$G_p = \frac{\text{Potencia entregada carga}}{\text{Potencia entregada cuadripolo}} = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2 - |b_1|^2} = \frac{|s_{21}|^2}{1 - |s_{11}|^2}$$



Relaciones de potencia en un cuadripolo (II)

- Caso 2: Cuadripolo acabado en impedancia Z_g y Z_L

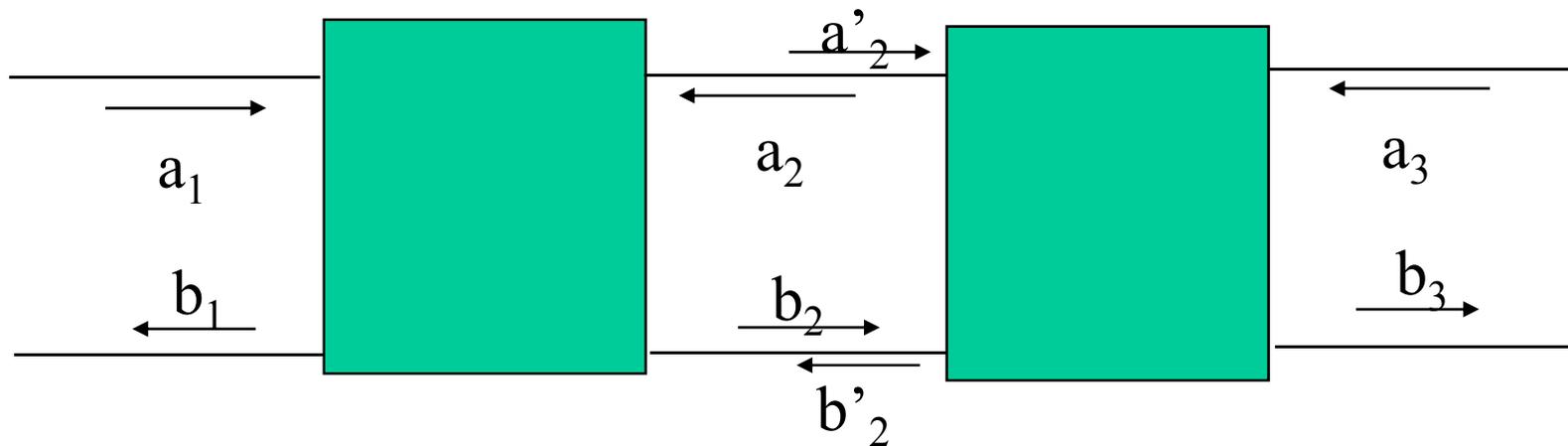


$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = s_{11} + \frac{s_{12} \cdot s_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - s_{22} \cdot \Gamma_L} \neq s_{11}; \Gamma_L = \frac{a_2}{b_2}$$

- Las expresiones de las ganancias son totalmente diferentes a las de la anterior transparencia (se verán en el tema de amplificadores)

Cuadripolos en cascada (I)

- La matriz S no es apropiada pues no relaciona ondas de entrada con ondas de salida
- Parámetros de transmisión en función de ondas de potencia

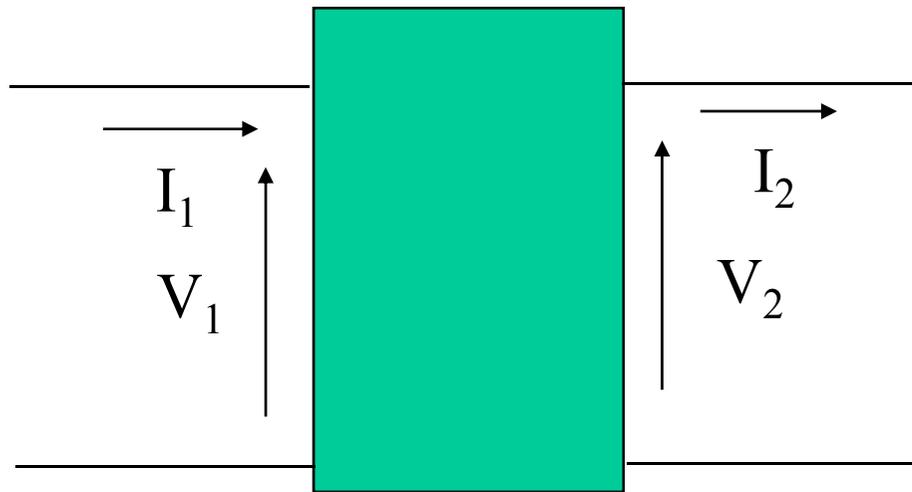


$$\left. \begin{aligned} b_2 &= t_{11} \cdot a_1 + t_{12} \cdot b_1 \\ a_2 &= t_{21} \cdot a_1 + t_{22} \cdot b_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} s_{12} & -\frac{s_{22} \cdot s_{11}}{s_{21}} & \frac{s_{22}}{s_{21}} \\ -\frac{s_{11}}{s_{21}} & \frac{1}{s_{12}} \end{pmatrix} \Rightarrow T_{total} = \prod_{i=N}^1 T_i$$



Cuadripolos en cascada (II)

- Útil cuando se trabaja con cuadripolos en cascada y se disponen de los voltajes y corrientes en lugar de ondas de amplitud o potencia.



$$\left. \begin{aligned} V_1 &= A \cdot V_2 + B \cdot I_2 \\ I_1 &= C \cdot V_2 + D \cdot I_2 \end{aligned} \right\}$$



Parámetros de transmisión ABCD para estructuras comunes

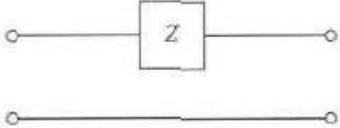
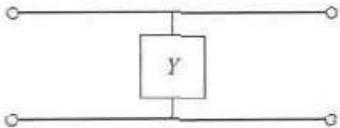
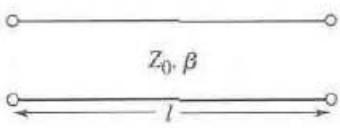
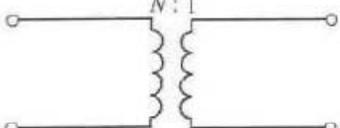
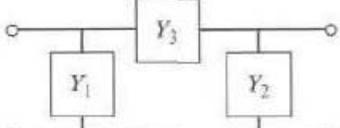
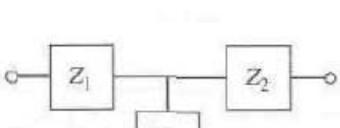
| | | |
|---|--|--|
|  | $A = 1$ $C = 0$ | $B = Z$ $D = 1$ |
|  | $A = 1$ $C = Y$ | $B = 0$ $D = 1$ |
|  | $A = \cos \beta l$ $C = jY_0 \sin \beta l$ | $B = jZ_0 \sin \beta l$ $D = \cos \beta l$ |
|  | $A = N$ $C = 0$ | $B = 0$ $D = \frac{1}{N}$ |
|  | $A = 1 + \frac{Y_2}{Y_3}$ $C = Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3}$ | $B = \frac{1}{Y_3}$ $D = 1 + \frac{Y_1}{Y_3}$ |
|  | $A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ $C = \frac{1}{Z_3}$ | $B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$ $D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}$ |



Tabla de transformación de parámetros

| | <i>S</i> | <i>Z</i> | <i>Y</i> | <i>ABCD</i> |
|------------------------|---|--|--|--|
| <i>S</i> ₁₁ | <i>S</i> ₁₁ | $\frac{(Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$ | $\frac{(Y_0 - Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$ | $\frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$ |
| <i>S</i> ₁₂ | <i>S</i> ₁₂ | $\frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$ | $\frac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$ | $\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$ |
| <i>S</i> ₂₁ | <i>S</i> ₂₁ | $\frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$ | $\frac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$ | $\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$ |
| <i>S</i> ₂₂ | <i>S</i> ₂₂ | $\frac{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$ | $\frac{(Y_0 + Y_{11})(Y_0 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$ | $\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$ |
| <i>Z</i> ₁₁ | $Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | <i>Z</i> ₁₁ | $\frac{Y_{22}}{ Y }$ | $\frac{A}{C}$ |
| <i>Z</i> ₁₂ | $Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | <i>Z</i> ₁₂ | $\frac{-Y_{12}}{ Y }$ | $\frac{AD - BC}{C}$ |
| <i>Z</i> ₂₁ | $Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | <i>Z</i> ₂₁ | $\frac{-Y_{21}}{ Y }$ | $\frac{1}{C}$ |
| <i>Z</i> ₂₂ | $Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | <i>Z</i> ₂₂ | $\frac{Y_{11}}{ Y }$ | $\frac{D}{C}$ |
| <i>Y</i> ₁₁ | $Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | $\frac{Z_{22}}{ Z }$ | <i>Y</i> ₁₁ | $\frac{D}{B}$ |
| <i>Y</i> ₁₂ | $Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | $\frac{-Z_{12}}{ Z }$ | <i>Y</i> ₁₂ | $\frac{BC - AD}{B}$ |
| <i>Y</i> ₂₁ | $Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | $\frac{-Z_{21}}{ Z }$ | <i>Y</i> ₂₁ | $\frac{-1}{B}$ |
| <i>Y</i> ₂₂ | $Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$ | $\frac{Z_{11}}{ Z }$ | <i>Y</i> ₂₂ | $\frac{A}{B}$ |
| <i>A</i> | $\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$ | $\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ | $\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$ | <i>A</i> |
| <i>B</i> | $Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$ | $\frac{ Z }{Z_{21}}$ | $\frac{-1}{Y_{21}}$ | <i>B</i> |
| <i>C</i> | $\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$ | $\frac{1}{Z_{21}}$ | $\frac{- Y }{Y_{21}}$ | <i>C</i> |
| <i>D</i> | $\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$ | $\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$ | $\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$ | <i>D</i> |

$$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}; \quad |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}; \quad \Delta Y = (Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}; \quad \Delta Z = (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}; \quad Y_0 = 1/Z_0$$

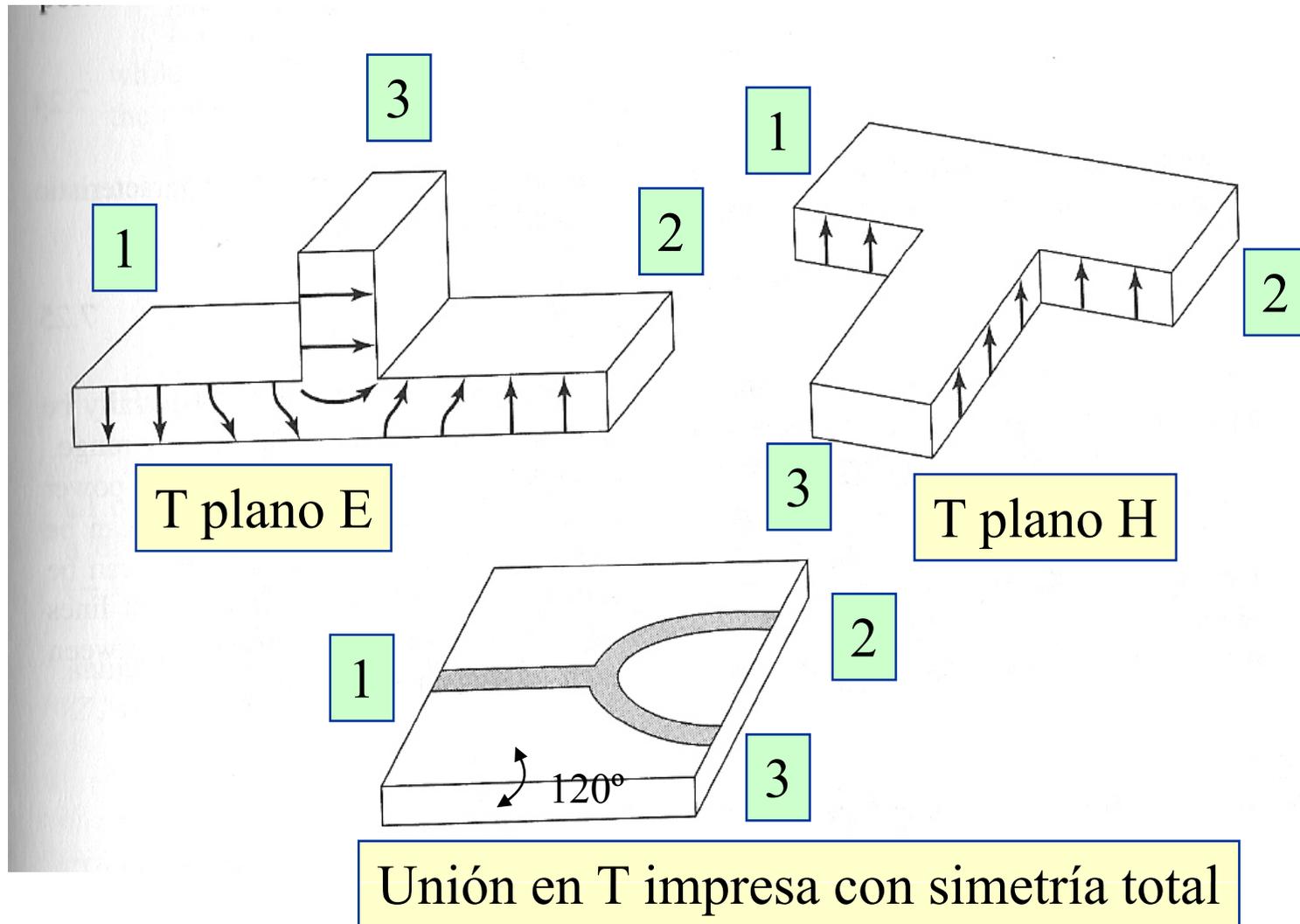


Uniones de tres guías (I)

- Partiremos de hexapolos no disipativos
- Se considerarán uniones de guías que soporten solamente el modo fundamental
- Las simetrías geométricas tenderán a tener una solución simétrica electromagnética
- En una guía con modo TE_{10} el modo fundamental es simétrico con relación al plano paralelo a las generatrices y que pasa por las centrales de las caras anchas y no es simétrico respecto al perpendicular que pasa por las caras estrechas.
- Análisis: se excita el TE_{10} por la puerta 1
 - Unión figura a: simetría **T plano E**
 - Unión figura b: simetría **T plano H**
 - Unión figura c: simetría total de 120°



Uniones de tres guías (II)



Uniones de tres guías (III): simetría geométrica

T plano H

Excitación inicial $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Nueva excitación $A' = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}; B' = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Relación entre A' y A

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \Rightarrow \begin{cases} A' = T \cdot A \\ B' = T \cdot B \end{cases}$$

T plano E

Excitación inicial $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Nueva excitación $A' = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ -a_3 \end{pmatrix}; B' = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ -b_3 \end{pmatrix}$

Relación entre A' y A

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \Rightarrow \begin{cases} A' = T \cdot A \\ B' = T \cdot B \end{cases}$$

Como la matriz de dispersión es una (la T es una)

$$\begin{cases} B' = S \cdot A' \\ B = S \cdot A \end{cases} \Rightarrow T \cdot B = S \cdot T \cdot A \Rightarrow T \cdot S \cdot A = S \cdot T \cdot A$$

Unión simétrica

T plano H

$$S_{11} = S_{22}$$

$$S_{13} = S_{23}$$

T plano E

$$S_{11} = S_{22}$$

$$S_{13}^2 = S_{23}^2$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}$$

$$S_{13} = S_{23} = S_{12}$$



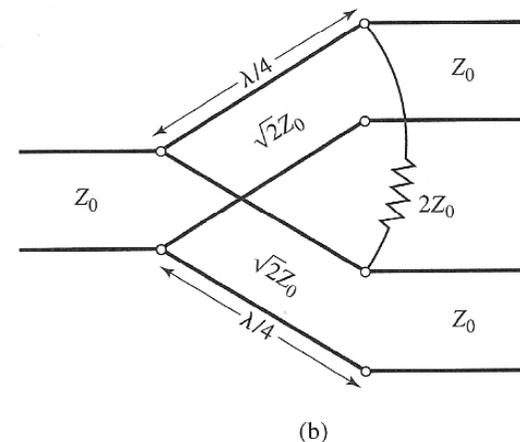
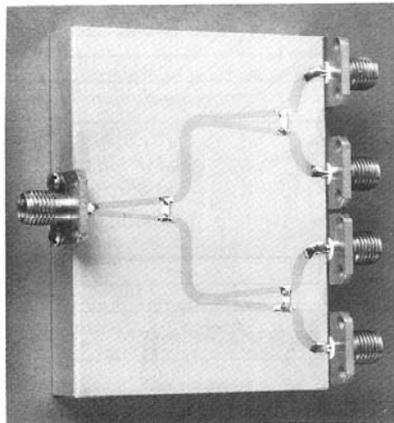
Uniones de tres guías (IV): teoremas de uniones no disipativas

- 1) Una unión de tres guías no disipativa no puede estar completamente adaptada. (Demostración por reducción al absurdo)
 - o Corolario: Una unión en T no disipativa y de simetría completa no puede estar adaptada desde ninguna de sus guías.
- 2) Si una unión de tres guías no disipativa está adaptada desde dos de sus guías, la tercera está desacoplada de ellas y es una unión degenerada. (Dem. ejercicio)
 - o Corolario: Una unión en T no disipativa y simétrica con relación a un plano, está adaptada desde una de sus guías simétricas es una unión degenerada.
 - o Corolario: Una unión en T no disipativa ni degenerada sólo puede estar adaptada desde una de sus guías.
- 3) Si se cierra uno de los brazos de una unión de tres guías no disipativa con un cortocircuito colocado en posición conveniente, se consigue un cuadripolo degenerado, con sus dos guías desacopladas. (Demostración)
- 4) En unión de tres guías no disipativa y simétrica con relación a un plano, un cortocircuito, colocado en una posición adecuada en la guía que coincide con su simétrica respecto dicho plano, adapta el cuadripolo resultante. (Demostración, ejercicio)



El divisor de potencia Wilkinson

- De los teoremas anteriores, una unión en T sin pérdidas no puede estar adaptada desde todas sus puertas. Además, el aislamiento entre terminales no es bueno.
- La presencia de pérdidas (divisor resistivo, Pozar pp.362): tiene adaptadas todas las puertas, el aislamiento entre puertas de salida es malo, las pérdidas hace que la mitad de la potencia se disipe en las resistencias.
- Se puede conseguir mediante una red CON pérdidas (no verifica los teoremas de la unión en T sin pérdidas) un divisor denominado Wilkinson:
 - Perfectamente adaptado
 - Con las puertas de salida aisladas entre sí
 - Que cuando está adaptado, no hay pérdidas de potencia porque forzamos a que no haya energía por dicha resistencia

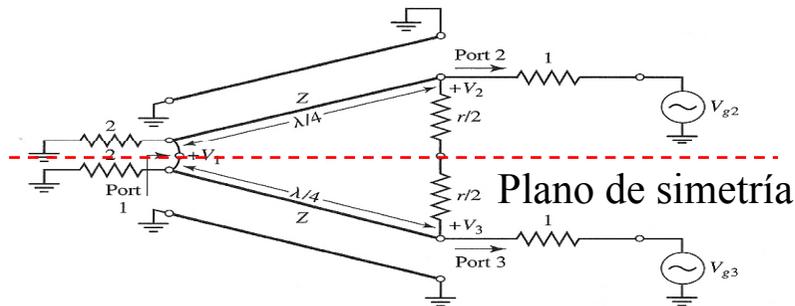


Diseño del divisor de potencia Wilkinson simétrico: excitación en modos par-impar

- Lo analizaremos para una relación de 3 dB mediante modos par-impar porque EXISTE SIMETRÍA ELÉCTRICA Y GEOMÉTRICA
- Incógnitas: impedancia de las líneas, Z , y resistencia entre puertos, r .
- Proceso:
 - Visualizar si existe simetría eléctrica y geométrica: EXISTE ENTRE LOS PUERTOS 2 Y 3

$$s_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1, a_3=0} = 0; s_{23} = \left. \frac{b_2}{a_3} \right|_{a_1, a_2=0} = 0$$

- Objetivo: adaptación puertos y aislamiento.
- Consecución de la excitación simétrica mediante una excitación apropiada en dos puertos tal que su suma sea la que se pide en la definición
- Si el parámetro es el s_{22} supone $a_3=0$, si el parámetro es el s_{23} ($=s_{32}$) supone $a_2=0$. En ambos casos el parámetro de salida a medir es b_2



| | Entrada | | Salida |
|------------|---------|-------|----------------------|
| Excitación | a_2 | a_3 | b_2 |
| Par (P) | a | a | $a\rho_1$ |
| Impar (I) | a | $-a$ | $a\rho_2$ |
| (P+I) | $2a$ | 0 | $a(\rho_1 + \rho_2)$ |
| (P-I) | 0 | $2a$ | $a(\rho_1 - \rho_2)$ |

Diseño del divisor de potencia Wilkinson simétrico: excitación par

- Los nodos 2 y 3 tienen el mismo nivel de potencial, lo que supone que:
 - No hay corriente en $r/2$
 - Muro magnético en el plano de simet
- La impedancia de entrada en el term vale:

$$Z_{in}^e = \frac{Z^2}{2} \Bigg|_{\text{adaptación}} = 1 \Rightarrow \Gamma_2^e = 0 = \rho_1 \Rightarrow Z = \sqrt{2}$$

- El puerto 2 está adaptado para excitación par.

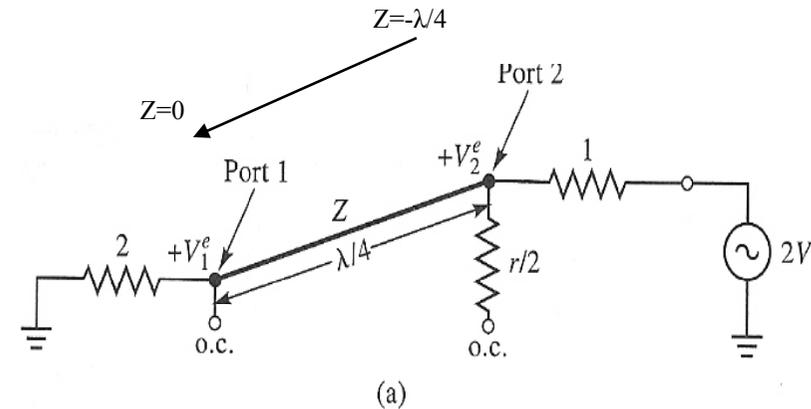
$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} = V^+ \cdot (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

- Los voltajes en los nodos son:

$$V_2^e = V \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = V^+ \cdot j(1 - \Gamma) = V$$

$$\Gamma = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$V_1^e = V(0) = V^+ \cdot (1 + \Gamma) = -V \cdot j \cdot \frac{(1 + \Gamma)}{(1 - \Gamma)} = -j \cdot V \cdot \sqrt{2}$$



Port 2

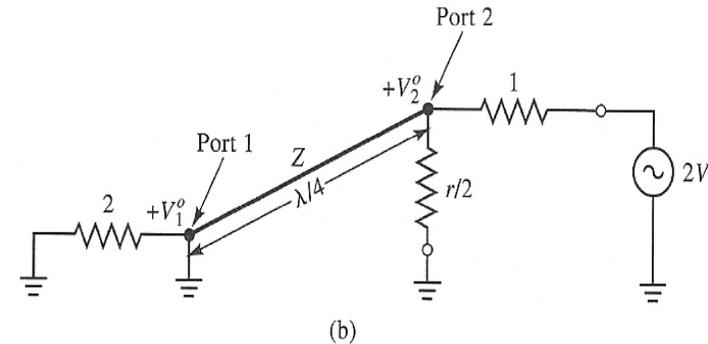


Diseño del divisor de potencia Wilkinson simétrico: excitación impar

- Los nodos 2 y 3 tienen niveles de potenciales opuestos, lo que supone que:
 - No hay voltaje en el plano de simetría
 - Muro eléctrico en el plano de simetría.
- La impedancia de entrada en el terminal 2 vale:

$$Z_{in}^o = \frac{r}{2} \Bigg|_{\text{adaptación}} = 1 \Rightarrow \Gamma_2^o = 0 = \rho_2 \Rightarrow r = 2$$

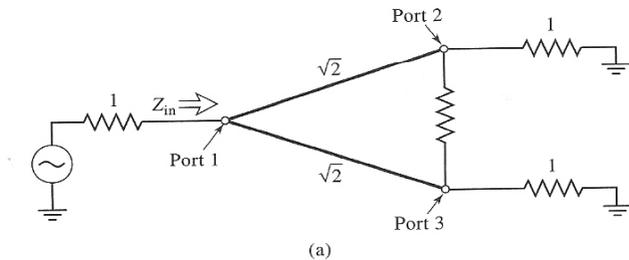
- Para el valor anterior hay adaptación en el terminal 2 para el modo impar.
- Los voltajes en los nodos son tales que excitan la resistencia y nada a la línea y valen:



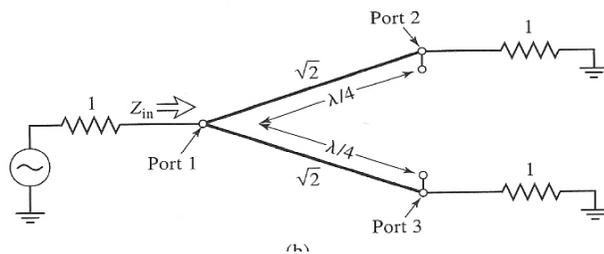
$$V_2^o = V$$

$$V_1^o = 0$$

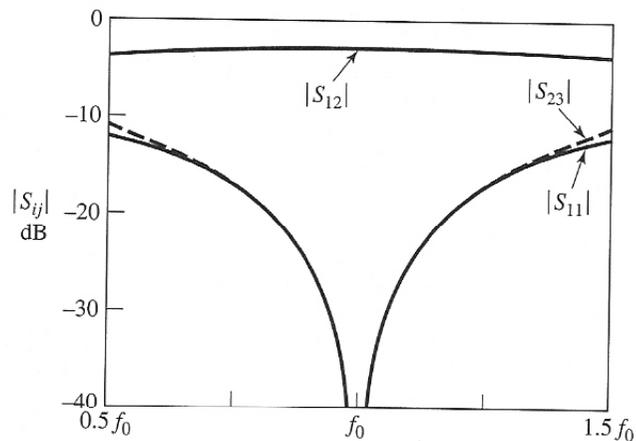
Análisis del divisor de potencia Wilkinson simétrico



(a)



(b)



$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = 0 (Z_{in} = 1)$$

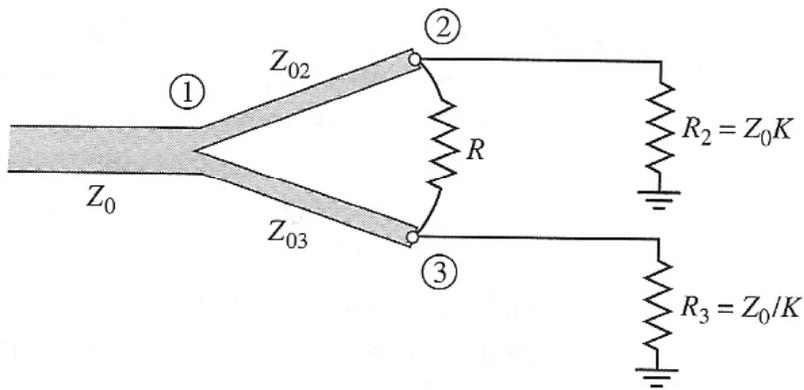
$$s_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0} = \left. \begin{array}{l} a_1 = 0 (Z_o) \\ a_3 = 0 (P + I) \\ b_2 = a(\rho_1 + \rho_2) = a(\Gamma_2^e + \Gamma_2^o) = 0 \\ a_2 = 2a \end{array} \right\} = 0 = s_{33}$$

$$s_{12} = s_{21} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0} = \frac{V_1^e + V_1^o}{V_2^e + V_2^o} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$s_{23} = \frac{b_2}{a_3} \Big|_{a_1=a_2=0} = \frac{a(\Gamma_2^e - \Gamma_2^o)}{2a} = \frac{a(\rho_1 - \rho_2)}{2a} = 0$$



Otros divisores de potencia Wilkinson



$$K^2 = \frac{P_3}{P_2} \Rightarrow \begin{cases} Z_{o3} = Z_o \cdot \sqrt{\frac{1+K^2}{K^3}} \\ Z_{o2} = Z_o \cdot \sqrt{K(1+K^2)} \end{cases}$$

$$R = Z_o \cdot \left(K + \frac{1}{K} \right); R_2 = Z_o \cdot K; R_3 = \frac{Z_o}{K}$$

- Divisor de potencia asimétrico, se describe arriba (ejercicio: Collin, pp 444-446)
- Divisor Wilkinson de varias secciones para incrementar el ancho de banda.
- Divisor Wilkinson con N divisiones (inconveniente hay cruces)

Acoplos directivos (I): teoremas

- De las uniones de 4 guías se estudiarán los acoplos directivos.
- Definición: un acoplo directivo es una unión de 4 guías no disipativa y no degenerada, adaptada desde 2 de dichas guías y tal que no existe acoplo entre una de las últimas y otra de las restantes: $s_{11}=s_{22}=s_{13} = 0$
- Teorema 1: Un acoplo directivo está completamente adaptado y también están desacopladas la pareja formada por las guías que no se suponen desacopladas inicialmente. (Demostración)
- Teorema 2: Una unión de 4 guías no disipativa y no degenerada que esté adaptada desde tres de ellas es un acoplo directivo. (Demostración)
- Teorema 3: Si una unión de 4 guías, no disipativa y no degenerada, tiene 2 guías desacopladas y está adaptada desde ellas, es un acoplo

directivo.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & s_{34} \\ s_{14} & 0 & s_{34} & 0 \end{pmatrix}; S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 0 & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & 0 & 0 \\ s_{14} & s_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Acoplos directivos (II): interpretación física

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & s_{34} \\ s_{14} & 0 & s_{34} & 0 \end{pmatrix}; \Rightarrow \begin{cases} b_1 = s_{12} \cdot a_2 + s_{14} \cdot a_4 \\ b_2 = s_{12} \cdot a_1 + s_{23} \cdot a_3 \\ b_3 = s_{23} \cdot a_2 + s_{34} \cdot a_4 \\ b_4 = s_{14} \cdot a_1 + s_{34} \cdot a_3 \end{cases} \Big|_{a_3, a_2, a_4=0} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = s_{12} \cdot a_1 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = s_{14} \cdot a_1 \end{cases}$$

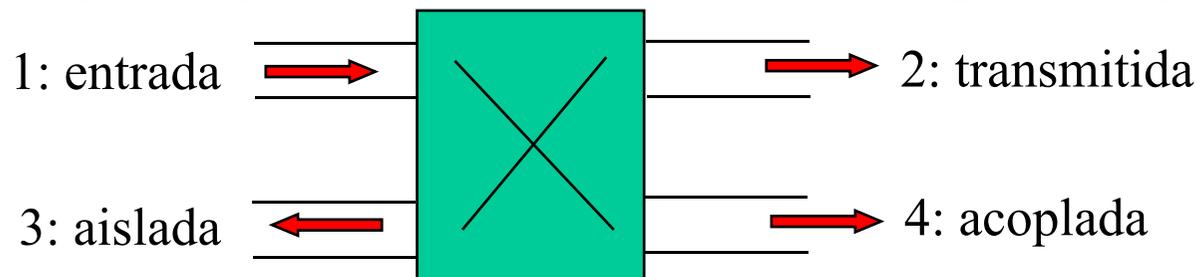
La potencia incidente por la guía 1 se distribuye entre las 2 y 4.

$$|s_{21}|^2 + |s_{41}|^2 = 1$$

Coefficiente de transmisión: el mayor de los anteriores coeficientes.

Coefficiente de acoplamiento: el menor de los anteriores. El nombre del tipo de acoplo lo da la relación en dB del coeficiente anterior

Directividad (para acoplos no ideales): relación entre el acoplamiento y el aislamiento.



Acoplos directivos (III): cambio de plano de referencia

Si calculamos los elementos diagonales de $S^H S = I$ se llega a:

$$\|S_{21}\| = \|S_{34}\|; \|S_{14}\| = \|S_{23}\|$$

Que en forma módulo-argumental resulta una matriz de parámetros S:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \cdot e^{ja} & 0 & B \cdot e^{jb} \\ A \cdot e^{ja} & 0 & B \cdot e^{jc} & 0 \\ 0 & B \cdot e^{jc} & 0 & A \cdot e^{jd} \\ B \cdot e^{jb} & 0 & A \cdot e^{jd} & 0 \end{pmatrix}; si S^H \cdot S = \Delta; (1,3)-(2,4); S_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \cdot e^{ja} & 0 & B \cdot e^{jb} \\ A \cdot e^{ja} & 0 & -B \cdot e^{j(a+d-b)} & 0 \\ 0 & -B \cdot e^{j(a+d-b)} & 0 & A \cdot e^{jd} \\ B \cdot e^{jb} & 0 & A \cdot e^{jd} & 0 \end{pmatrix}$$

Si desplazamos distancias l_1, l_2, l_3 y l_4 para simplificar la anterior matriz

$$\begin{cases} \beta_1 \cdot l_1 + \beta_2 \cdot l_2 = a - \alpha \\ \beta_1 \cdot l_1 + \beta_4 \cdot l_4 = b - \beta \\ \beta_2 \cdot l_2 + \beta_3 \cdot l_3 = a + d - b + \pi - \gamma \\ \beta_3 \cdot l_3 + \beta_4 \cdot l_4 = d - \delta \end{cases} \quad \alpha = \delta = 0; \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Sólo pueden fijarse 3 fases:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & -jB \\ A & 0 & -jB & 0 \\ 0 & -jB & 0 & A \\ -jB & 0 & A & 0 \end{pmatrix};$$

Caso particular: la puerta acoplada y transmitida se encuentran desfasadas 90°

Acoplador simétrico.



Acoplos directivos (IV), aplicación: obtención de un desfaseador variable.

Acoplo 3 dB (híbrido 3 dB): divide de igual forma la potencia incidente entre la puerta transmitida y acoplada. La matriz de dispersión (fijando las fases como en 5.22

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerramos las guías 2 y 4 por un pistón de cortocircuito variable $\Gamma = e^{j\Psi}$
Operando para una estructura cerrada por dos guías queda:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & j\Gamma \\ j\Gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Si la antigua puerta 3 del híbrido se remata con una carga $\Gamma' = \frac{a_3}{b_3}$ resulta

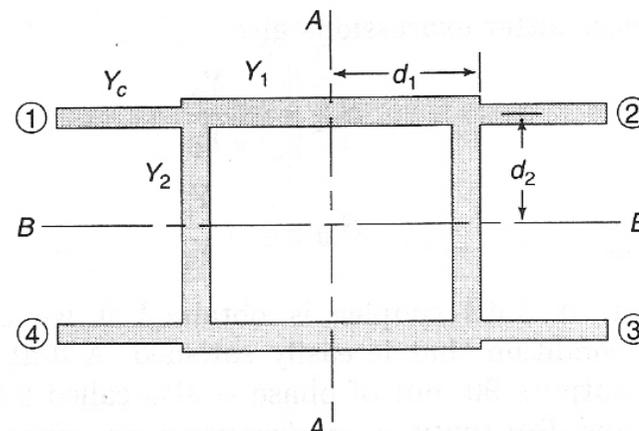
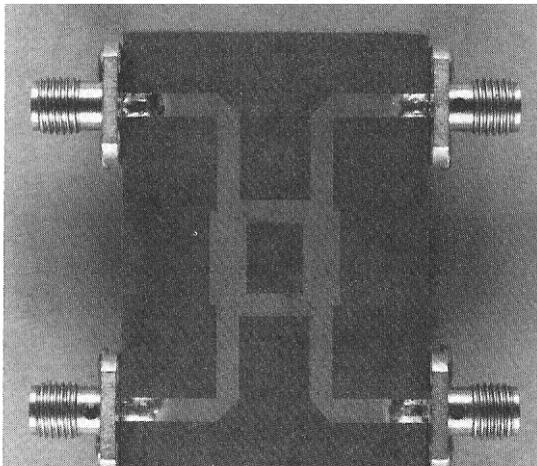
$$\Gamma'' = \frac{b_1}{a_1} = \frac{j\Gamma a_3}{\frac{1}{j\Gamma} b_3} = -\Gamma^2 \cdot (\Gamma') = e^{j(2\Psi + \pi)} \cdot (\Gamma')$$

El coeficiente de reflexión en la puerta 1 es el que hay en la puerta antigua 3 desfasado la cantidad $(2\Psi + \pi)$



Acoplos directivos (V): acoplo branch-line

- Circuito impreso con las puertos transmitida y acoplada en cuadratura de fase:
 - La potencia puede dividirse simétricamente entre las puertos transmitida y acoplada (branch-line de 3 dB)
 - Puede dividirse asimétricamente entre las puertos transmitida y acoplada (con la estructura branch-line no pueden conseguirse grandes acoplamientos >8dB)
 - Formado por cuatro brazos de longitud $\lambda/4$ e impedancias Z_1 (horizontal) y Z_2 (vertical)
 - Las variables de diseño para un branch-line arbitrario son Z_1 y Z_2
 - Para el branch-line simétrico la matriz es:

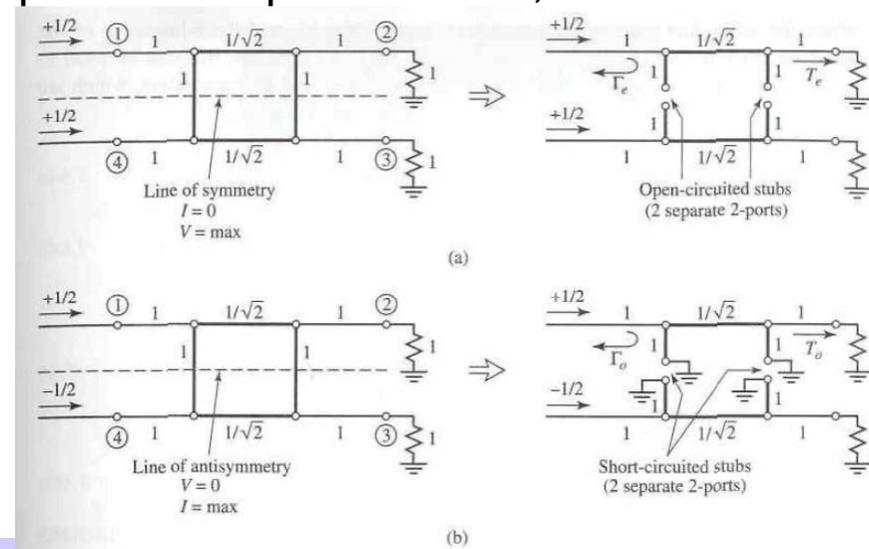
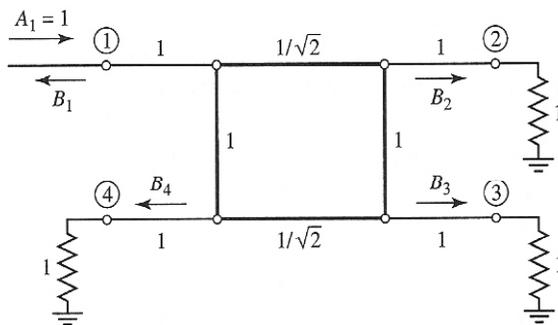


$$S_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{pmatrix}$$



Acoplos directivos (VI): análisis de un híbrido branch-line

- Proceso de análisis: obtención de la matriz de parámetros S del híbrido una vez que se conocen Z_1 y Z_2
 - Aplicación de la definición de cada parámetro S.
 - Existe simetría geométrica y eléctrica: se puede aplicar modos par-impar
 - Simetría simple (proceso seguido en 5.27, Pozar, 7.5): se reduce el octopolo a un cuadripolo, hay que analizar parámetros de transmisión y reflexión
 - Simetría doble (proceso seguido en 5.29, se aplica al diseño; Collin 6.4, pp.432-434): se reduce el octopolo a un dipolo circuital; sólo se analizan parámetros de reflexión



Acoplos directivos (VII): análisis de un híbrido branch-line

- Proceso: $s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2, a_3, a_4=0} = 0; s_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1, a_3, a_4=0} = 0; s_{13} = \frac{b_1}{a_3} \Big|_{a_1, a_2, a_4=0} = 0; s_{14} = \frac{b_1}{a_4} \Big|_{a_1, a_2, a_3=0} = 0$
 - Objetivo:
 - Consecución de la excitación simétrica mediante una excitación apropiada en dos puertos tal que su suma sea la que se pide en la definición
 - En todos los casos el parámetro de salida a medir es b_1 del cuadripolo en que la excitación par-impar ha convertido al octopolo.

$$b_1 = \frac{1}{2}(\Gamma_e + \Gamma_o)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(T_e + T_o)$$

$$b_3 = \frac{1}{2}(T_e - T_o)$$

$$b_4 = \frac{1}{2}(\Gamma_e - \Gamma_o)$$

| Parámetro a hallar | S_{11}, S_{14} | | Salida | S_{12}, S_{13} | | Salida |
|--------------------|------------------|-------|--------------------------|------------------|-------|----------------|
| | Entrada | | | Entrada | | |
| Excitación | a_1 | a_4 | b_1 | a_2 | a_3 | b_1 |
| Par (P) | a | a | $a\Gamma_e$ | a | a | aT_e |
| Impar (I) | a | $-a$ | $a\Gamma_o$ | a | $-a$ | aT_o |
| (P+I) | $2a$ | 0 | $a(\Gamma_e + \Gamma_o)$ | $2a$ | 0 | $a(T_e + T_o)$ |
| (P-I) | 0 | $2a$ | $a(\Gamma_e - \Gamma_o)$ | 0 | $2a$ | $a(T_e - T_o)$ |



Acoplos directivos (VIII): análisis de un híbrido branch-line

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ jY_0 \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & j \\ j & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ jY_0 \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix}$$

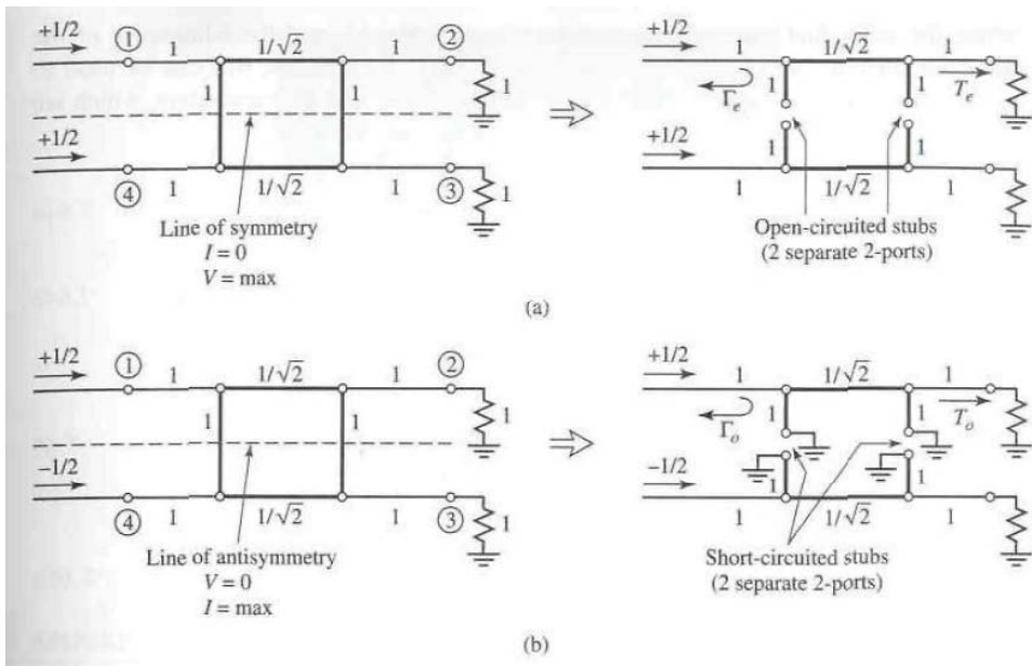
$$\Gamma_e = 0$$

$$T_e = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

$$\Gamma_o = 0$$

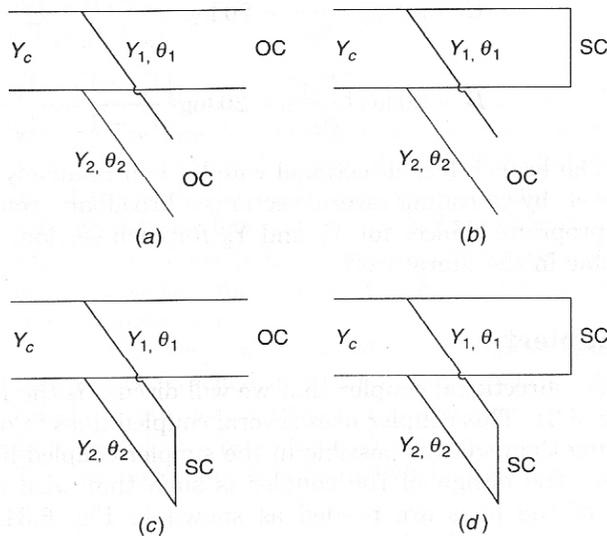
$$T_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$$

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ b_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b_4 = 0 \end{cases}$$



Acoplos directivos (IX): diseño de un branch-line

- Objetivo: determinar las impedancias de las líneas que con un esquema branch-line consiguen un acoplo directivo con las puertas transmitida y acoplada en cuadratura.
- Proceso: se hace uso de la simetría doble que existe en el branch-line. Planos PP'-QQ'
 - Se reduce el octopolo a un dipolo circuital.
 - El único parámetro que se mide es b_1 en función de las reflexiones con excitación par-imp



Acoplos directivos (X): diseño de un branch-line

| Parámetro | | | | | s_{11} | s_{12} | s_{13} | s_{14} |
|-------------------|---------|-------|-------|-------|--|--|--|--|
| | Entrada | | | | Salida | Salida | Salida | Salida |
| Excitación | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | b_1 | b_1 | b_1 | b_1 |
| 1)P (PP')-P(QQ') | a | a | a | a | $a\Gamma_1$ | $a\Gamma_1$ | $a\Gamma_1$ | $a\Gamma_1$ |
| 2)P (PP')-I (QQ') | a | -a | -a | a | $a\Gamma_2$ | $a\Gamma_2$ | $a\Gamma_2$ | $a\Gamma_2$ |
| 3)I(PP')-P (QQ') | a | a | -a | -a | $a\Gamma_3$ | $a\Gamma_3$ | $a\Gamma_3$ | $a\Gamma_3$ |
| 4)I (PP')-I (QQ') | a | -a | a | -a | $a\Gamma_4$ | $a\Gamma_4$ | $a\Gamma_4$ | $a\Gamma_4$ |
| (1+2+3+4) | 4a | 0 | 0 | 0 | $a(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)$ | | | |
| (1-2+3-4) | 0 | 4a | 0 | 0 | | $a(\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4)$ | | |
| (1-2-3+4) | 0 | 0 | 4a | 0 | | | $a(\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4)$ | |
| (1+2-3-4) | 0 | 0 | 0 | 4a | | | | $a(\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4)$ |

$$Y_1 = \sqrt{2} Y_0; Y_2 = Y_0; d_1 = d_2 = \lambda/4$$



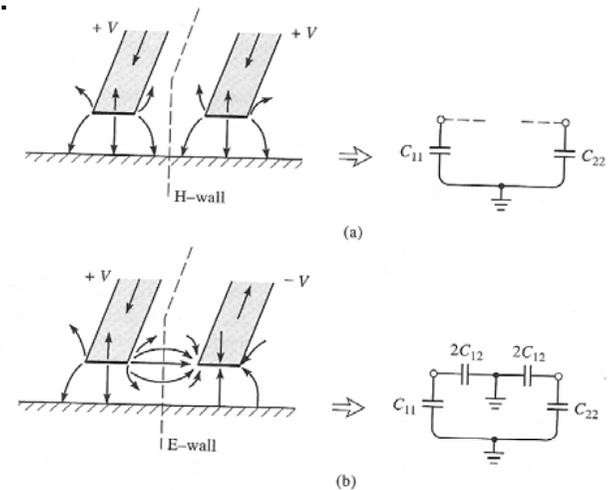
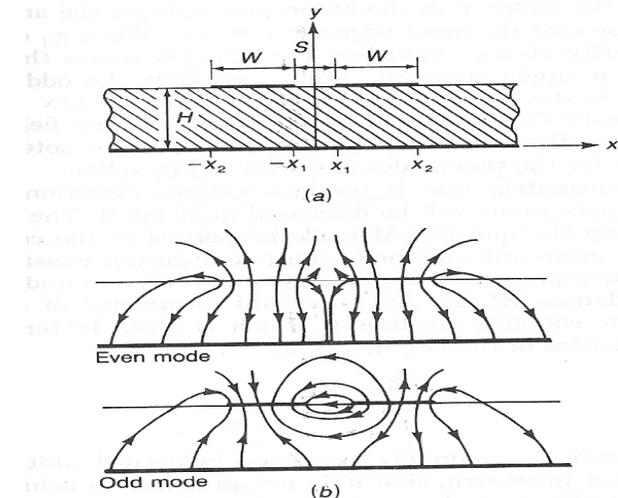
Acoplos directivos (XI): diseño de un branch-line asimétrico

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{4} (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) \\ s_{12} &= \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4) \\ s_{13} &= \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4) \\ s_{14} &= \frac{1}{4} (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} s_{13} &= -\frac{Y_2}{Y_1} \\ s_{12} &= -j \frac{Y_0}{Y_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = 20 \log \left(\frac{1}{|s_{13}|} \right)$$

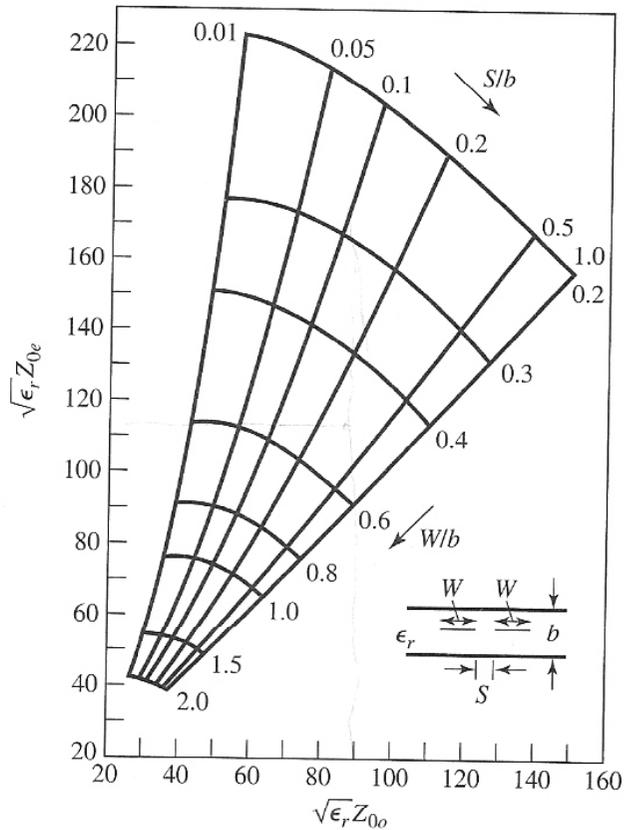


Acoplos directivos basados en líneas acopladas(I): teoría de líneas acopladas

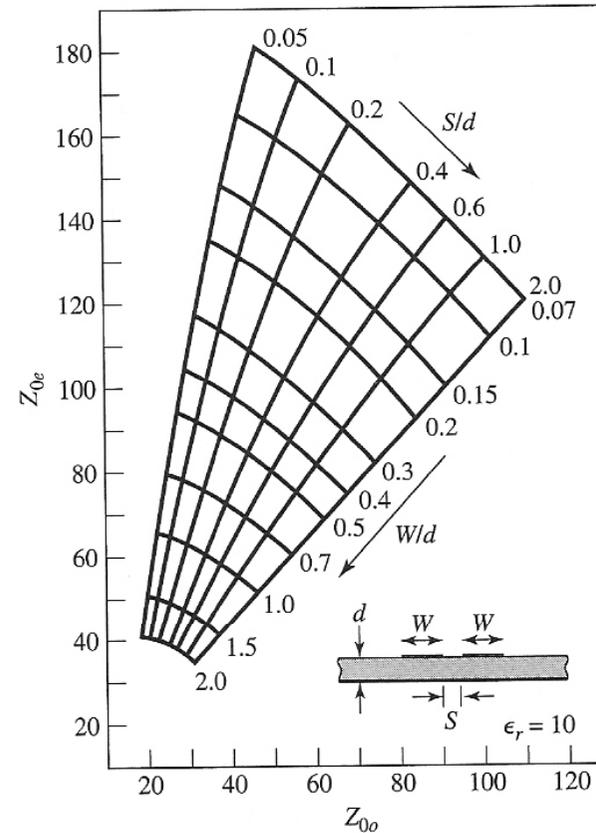
- Cuando dos líneas desprotegidas se encuentran sumamente próximas puede existir acoplamiento de potencia entre ellas.
- Se asume que operan en modo TEM (cierto para stripline y “casi” cierto para μ strip)
- Se puede buscar un circuito equivalente en constantes concentradas:
 - C_{12} capacidad de las tiras en ausencia de plano de masa.
 - C_{11} y C_{22} capacidades de las tiras con el plano de masa.
- Simetría eléctrica y geométrica: aplicación de modos par e impar:
 - Modo par: las corrientes en las tiras son iguales en módulo y dirección.
 - $C_e = C_{11} = C_{22}$; $Z_{oe} = 1/(\nu C_e)$
 - Modo impar: corrientes en las tiras iguales en módulo y sentido contrario.
 - $C_o = C_{11} + 2C_{12}$; $Z_{oo} = 1/(\nu C_o)$



Acoplos directivos basados en líneas acopladas(II): teoría de líneas acopladas, nomogramas

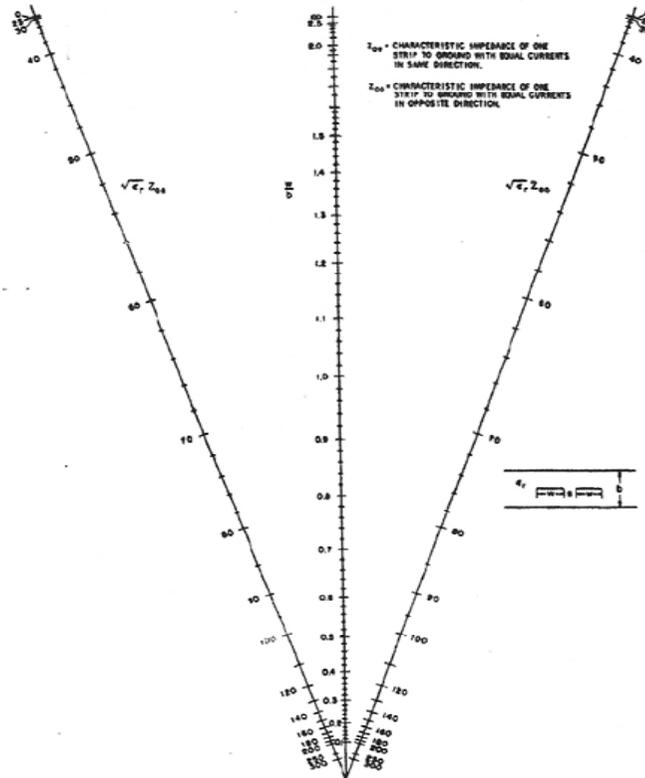


STRIPLINE



MICROSTRIP

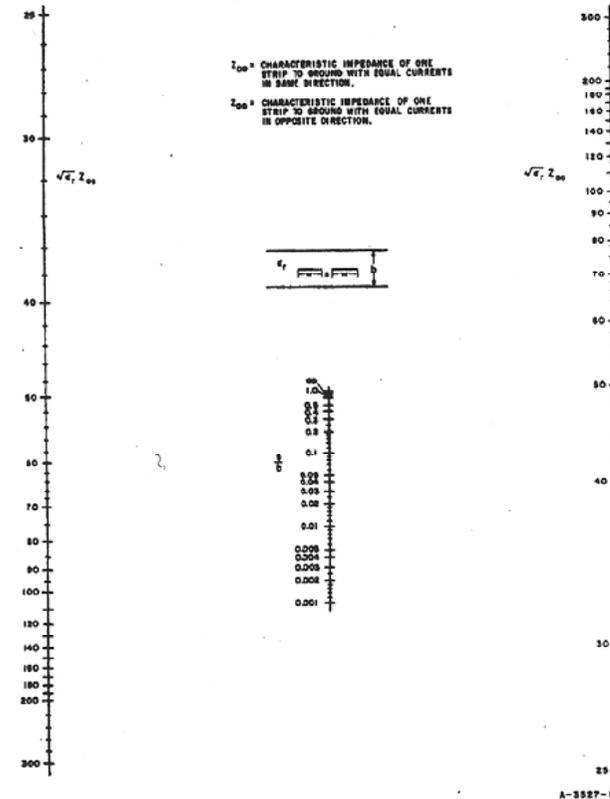
Acoplos directivos basados en líneas acopladas(III): teoría de líneas acopladas, nomogramas



SOURCE: Final Report, Contract DA 36-039 EC-63182, SRI; reprinted in *IRE Trans., PGMTT* (see Ref. 4, by S. B. Cohn).

FIG. 5.05-3(b) NOMOGRAM GIVING w/b AS A FUNCTION OF Z_{00} AND Z_{01} IN COUPLED STRIP LINE

w/b



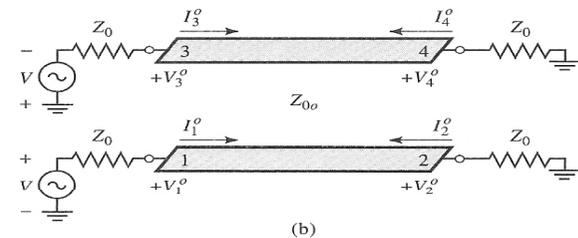
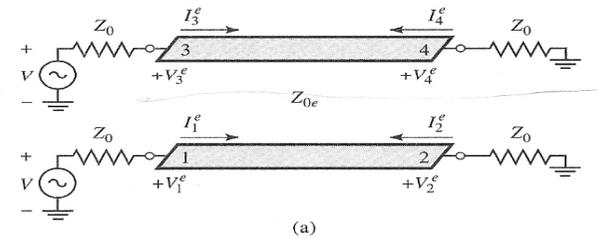
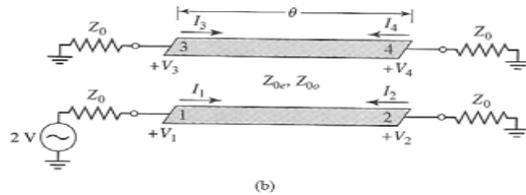
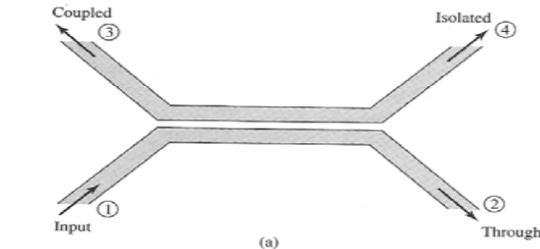
SOURCE: Final Report, Contract DA 36-039 EC-63182, SRI; reprinted in *IRE Trans., PGMTT* (see Ref. 4, by S. B. Cohn).

FIG. 5.05-3(a) NOMOGRAM GIVING s/b AS A FUNCTION OF Z_{00} AND Z_{01} IN COUPLED STRIP LINE

s/b



Acoplos directivos basados en líneas acopladas(IV): diseño de acoplos directivos



$$C = \frac{Z_{oe} - Z_{oo}}{Z_{oe} + Z_{oo}}; Z_o = \sqrt{Z_{oe} \cdot Z_{oo}}$$

$$\frac{V_2}{V} = -j\sqrt{(1-C^2)} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}(1-C^2) \frac{|V|^2}{Z_o}$$

$$\frac{V_3}{V} = C \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2} C^2 \frac{|V|^2}{Z_o}$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{Z_o}; P_4 = 0$$

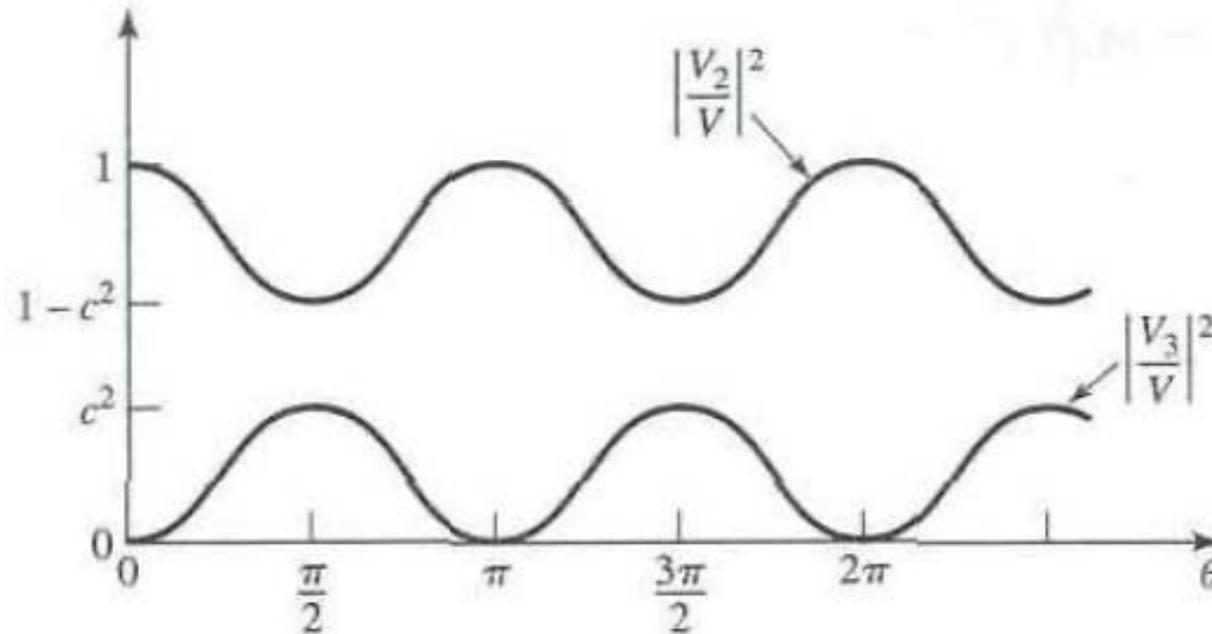
A muy bajas frecuencias $\theta \ll \pi/2$: $V_3=0$; $V_2=V$
 Para $\theta=\pi/2$: V_3 máximo; V_2 mínimo y $l=\lambda/4$

$$Z_{oe} = Z_o \cdot \sqrt{\frac{(1+C)}{(1-C)}}$$

$$Z_{oo} = Z_o \cdot \sqrt{\frac{(1-C)}{(1+C)}}$$



Voltajes acoplados y transmitidos en función de la longitud eléctrica

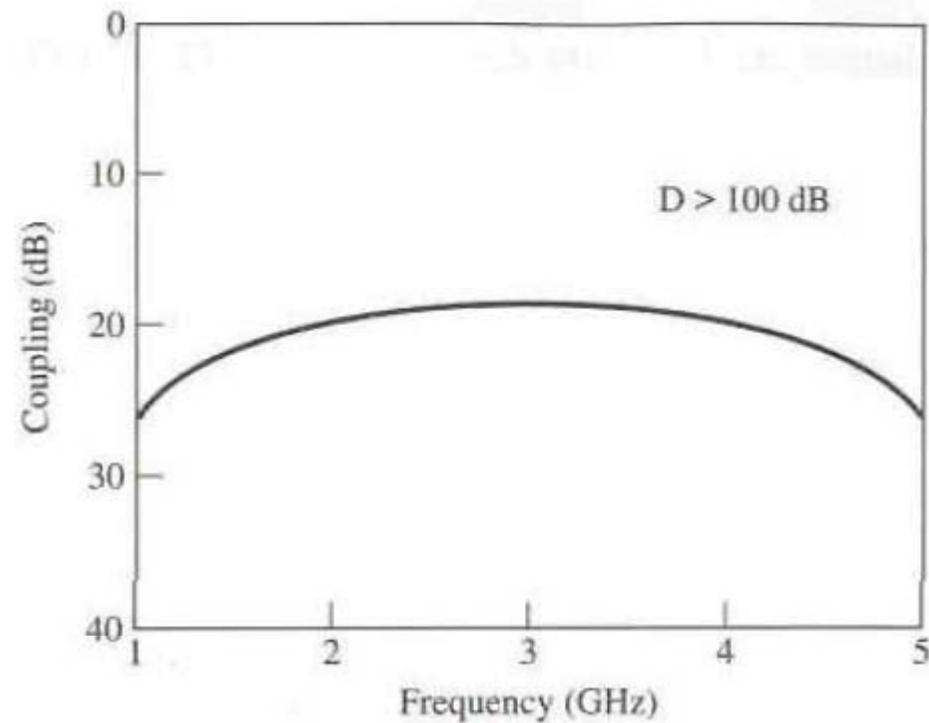
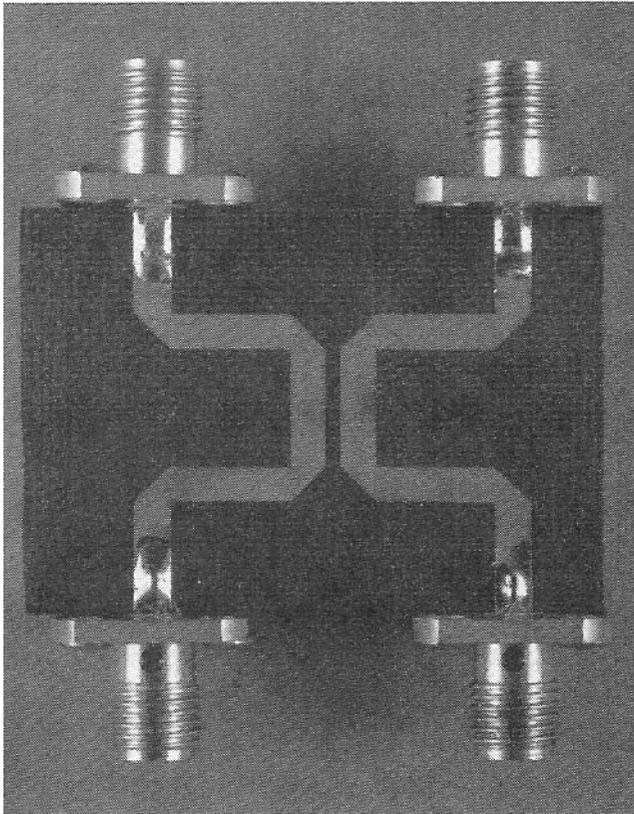


Cuando $\theta \ll \pi/2$: $V_3=0$; $V_2=V$ y no es acoplo directivo. Esto supone:

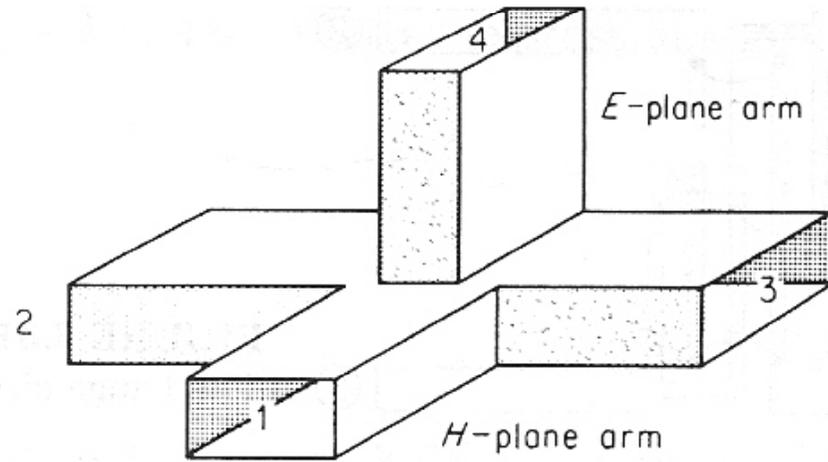
- La longitud de la línea acoplada es múltiplo de $\lambda/2$
- La frecuencia es muy baja, situación de continua.

Para $\theta=\pi/2$: V_3 máximo; V_2 mínimo y $l=\lambda/4$ y es acoplo directivo

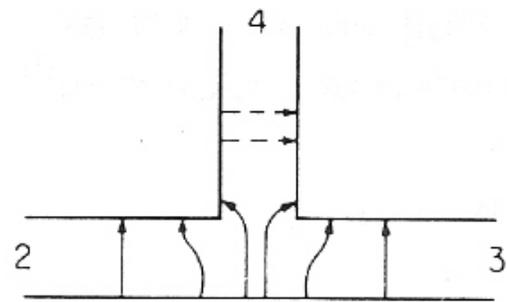
Acoplos directivos basados en líneas acopladas(V): diseño de acoplos directivos



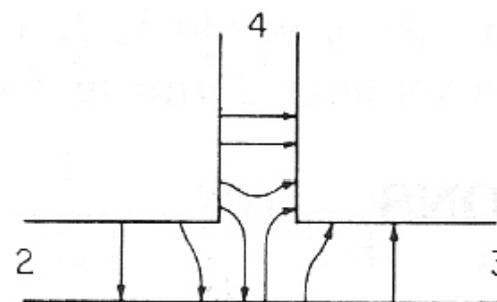
Uniones de cuatro guías: doble T (I)



(a)



(b)



(c)

1
(
t
c
E
E



Uniones de cuatro guías (II): simetría geométrica

Excitación inicial $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ Nueva excitación $A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ -a_4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \\ -b_4 \end{pmatrix}$

Relación entre A' y A $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \Rightarrow \begin{cases} A' = T \cdot A \\ B' = T \cdot B \end{cases}$

Como la matriz de dispersión es una (la doble T es una)

$$\begin{cases} B' = S \cdot A' \\ B = S \cdot A \end{cases} \Rightarrow T \cdot B = S \cdot T \cdot A \Rightarrow T \cdot S \cdot A = S \cdot T \cdot A \quad S_{22} = S_{33}; S_{13} = S_{12}; S_{34} = -S_{24}; S_{14} = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} A \cdot e^{ja} & M \cdot e^{jm} & M \cdot e^{jm} & 0 \\ M \cdot e^{jm} & B \cdot e^{jb} & N \cdot e^{jn} & R \cdot e^{jr} \\ M \cdot e^{jm} & N \cdot e^{jn} & B \cdot e^{jb} & -R \cdot e^{jr} \\ 0 & R \cdot e^{jr} & -R \cdot e^{jr} & C \cdot e^{jc} \end{pmatrix}$$



Uniones de cuatro guías (III): aplicaciones

- Se procede a cerrar las puertas 1 y 4 con cargas adaptadas: $a_1 = a_4 = 0$ y atacamos por las puertas 2 y 3:

$$b_1 = M \cdot e^{jm} \cdot a_2 + M \cdot e^{jm} \cdot a_3 = M \cdot e^{jm} \cdot (a_2 + a_3)$$

$$b_4 = R \cdot e^{jr} \cdot a_2 - R \cdot e^{jr} \cdot a_3 = R \cdot e^{jr} \cdot (a_2 - a_3)$$

- Propiedad: Si en una doble T se cierran las guías que pasan por el plano de simetría con cargas adaptadas, la energía recogida es proporcional a la suma y a la resta.
- Haciendo uso del hecho de que la matriz S sea unitaria resulta:

$$A^2 + 2M^2 = 1$$

$$C^2 + 2R^2 = 1$$

- Luego la matriz de dispersión depende de 6 parámetros: A, C, a, c, m, r
- Aplicaciones: adaptador a muy altas frecuencias.
 - Carga a adaptar en una de las guías simétricas (2 ó 3)
 - Se cierran con pistones en cortocircuito 1 y 4.



Uniones de cuatro guías (IV): T mágica

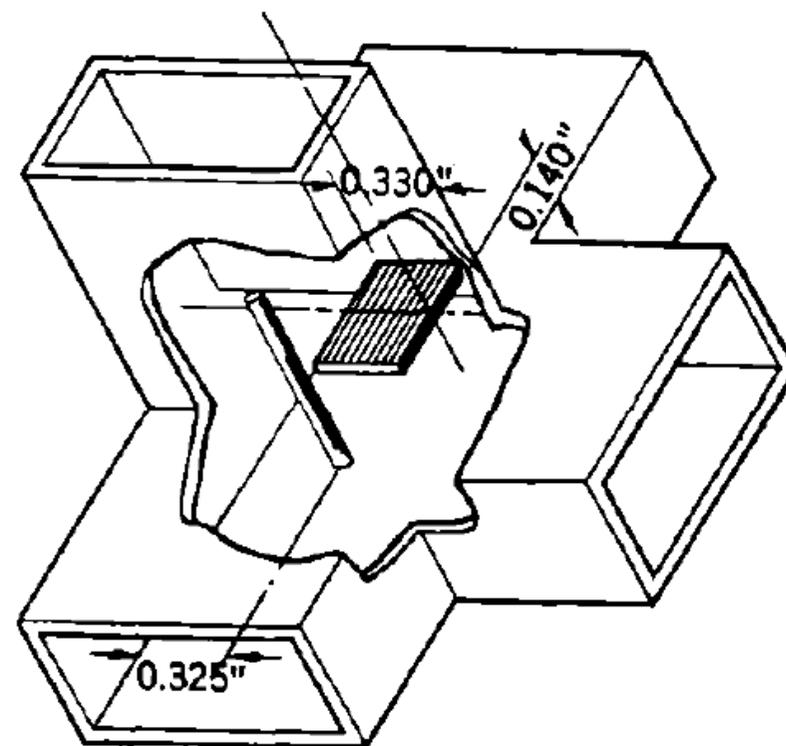
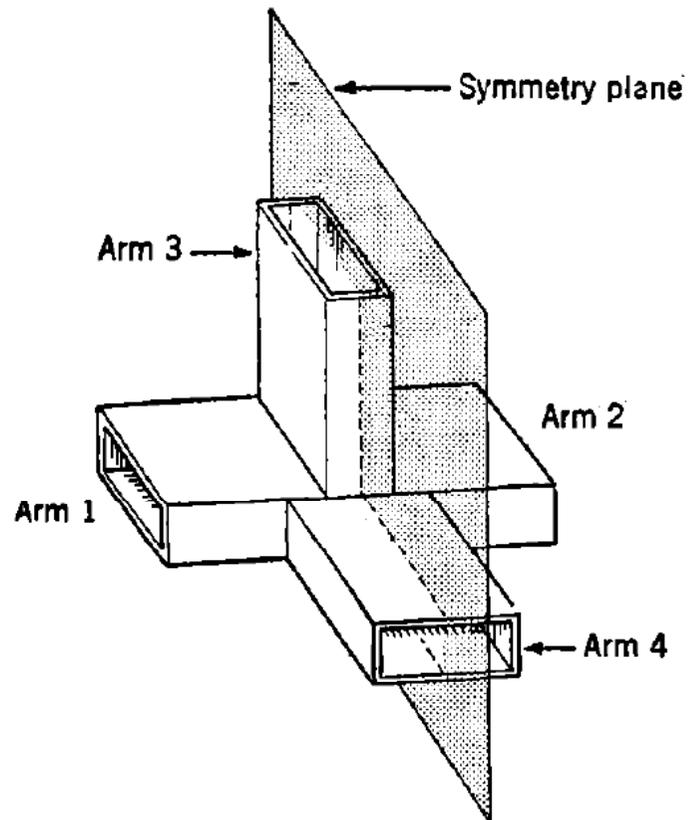
- Si la doble T se adapta desde las guías 1 y 4 se dice que la doble T es una T mágica. De aquí resulta:
 - $A = C = 0$
 - $B = N = 0$
 - $M = R = 1/\sqrt{2}$
- De donde la matriz de parámetros S de una T mágica tiene la forma:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{jm} & e^{jm} & 0 \\ e^{jm} & 0 & 0 & e^{jr} \\ e^{jm} & 0 & 0 & -e^{jr} \\ 0 & e^{jr} & -e^{jr} & 0 \end{pmatrix}$$

- La T mágica mantiene las propiedades de la doble T pero, además, tiene propiedades de acoplo directivo donde:
 - la relación de amplitud es siempre de 3 dB
 - una salida se encuentra desfasada 180° respecto a la otra
 - **Es un acoplador asimétrico**



T-mágica



Uniones de cuatro guías (V): T mágica impresa, rat- race

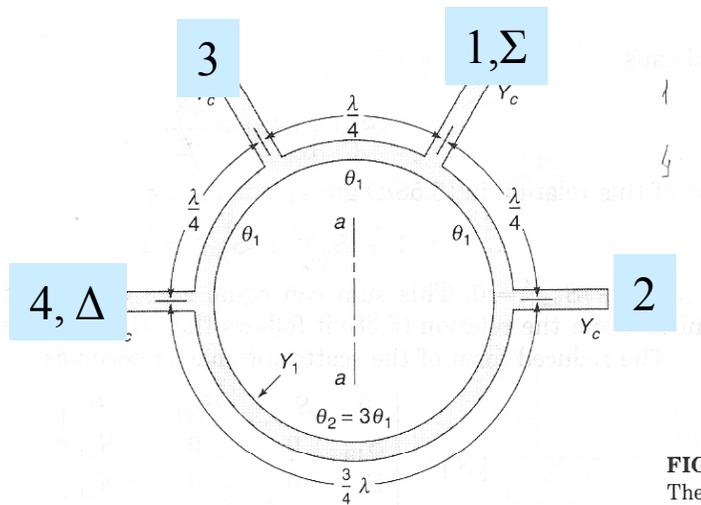
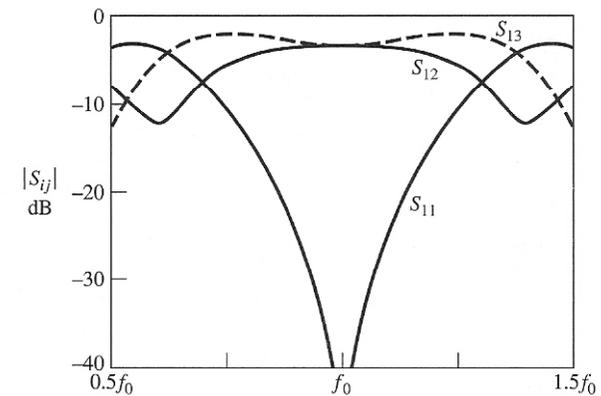
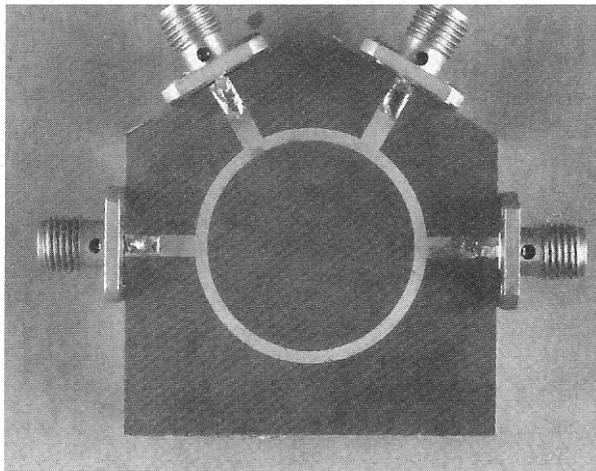


FIG
The

$$S = \frac{-j}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \cdot Z_0$$



RE 7.46 S parameter magnitudes versus frequency for the ring hybrid of Exan



BIBLIOGRAFÍA

- Robert E. Collin: "Foundations for microwave engineering" New York McGraw-Hill, 1992. (capítulo 4)
- David M. Pozar: "Microwave Engineering" Second Edition 1998, John Wiley & Sons. (capítulo 4).
- Montgomery: "Principles of microwave circuits"
- Rafael Domínguez: Cuestiones Básicas de Electromagnetismo, Aplicación a la Técnica de Microondas. Consejo Superior Investigaciones Científicas.
- IEEE Transactions on Microwave, Theory and Techniques

