Capítulo 5:

Resonadores en microondas

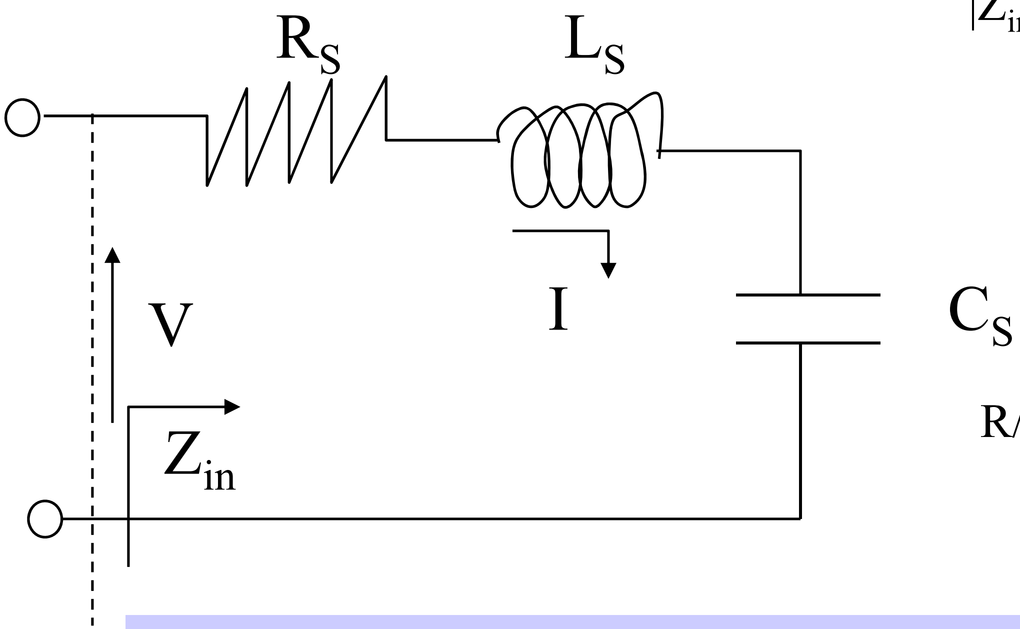
Los circuitos resonantes (en baja y alta frecuencia)son muy utilizados en ingeniería electrónica en una gran variedad de aplicaciones: filtros, osciladores, medidores de frecuencia y amplificadores sintonizados. El capítulo comienza recordando la teoría básica de circuitos resonantes, siendo la tecnología la que diferencie los circuitos resonantes en las distintas bandas frecuencia.

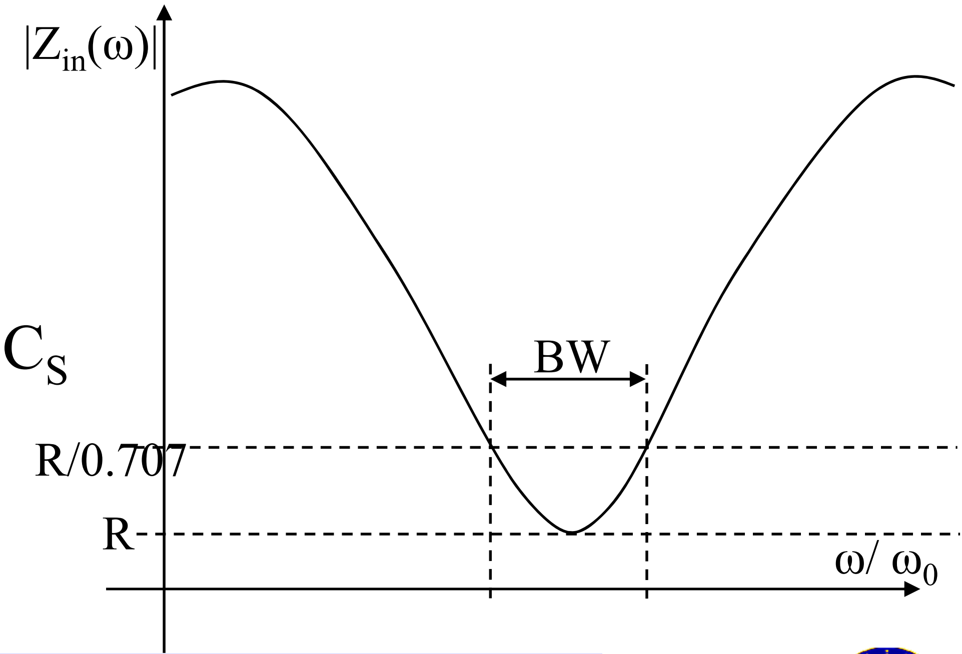
Las tecnologías expuestas para realizar circuitos resonantes en microondas serán: líneas de transmisión, guías de onda formando cavidades resonantes y guías dieléctricas constituyendo resonadores dieléctricos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN I: CIRCUITO RESONANTE SERIE

- Definición:
  - Resonancia serie o circuito resonante: en sus bornes hay mínimo de voltaje y máximo de corriente lo que supone mínimo del módulo de la impedancia.
  - Resonancia paralelo o circuito antirresonante: en sus bornes hay máximo de voltaje y mínimo de corriente lo que supone máximo del módulo de la impedancia.
- Configuración del circuito serie y representación del módulo de su impedancia





INTRODUCCIÓN II: CIRCUITO RESONANTE SERIE

- Impedancia de entrada al circuito resonante $Z_{in} = R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s}$
- Balance energético

$$P_{in} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot I^* = \frac{1}{2} \cdot Z_{in} \cdot |I|^2 = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot \left(R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} \right) = P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)$$

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot |I|^2$$

$$W_m = \frac{1}{4} \cdot |I|^2 \cdot L_s$$

$$W_e = \frac{1}{4} \cdot |V_c|^2 \cdot C_s = \frac{1}{4} \cdot |I|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \cdot C_s}$$

- Un circuito resuena cuando la energía media almacenada por el campo magnético coincide con la almacenada por el campo eléctrico. Esto supone que la impedancia de entrada a dicha frecuencia de resonancia es real.

$$Z_{in} == \frac{P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)}{|I|^2 / 2}$$

INTRODUCCIÓN III: CIRCUITO RESONANTE SERIE, DEFINICIONES

- Pulsación de resonancia: aquella a la que se cumple la condición de resonancia.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot C_s}}$$

- Factor de calidad o de sobretensión: relación existente entre la energía media almacenada en el circuito y la energía perdida por segundo.

$$Q = \omega \cdot \frac{energía\ \ media\ almacenada}{energía\ \ disipada\ por\ segundo} = \omega \cdot \frac{W_m + W_e}{P_{loss}}$$

- Definición en función del margen de frecuencias

$$Z_{in}(\omega) = R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} = R_s + j \cdot f(\omega)$$

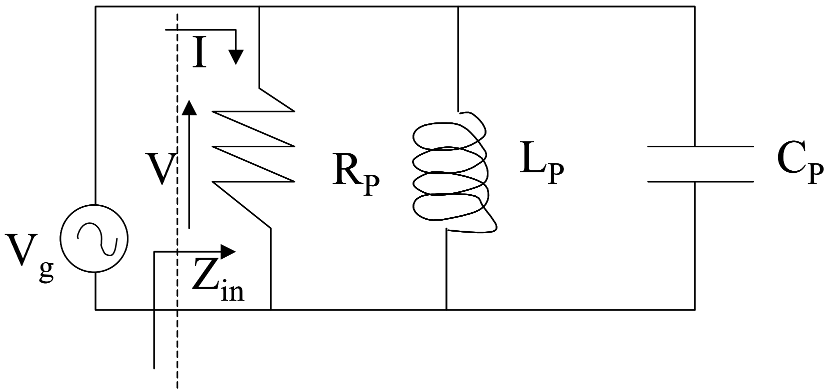
$$Z_{in}(\omega) = R_s + \left(j\omega_o \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega_o \cdot C_s} \right) + j \cdot (\omega - \omega_o) \cdot \left.\frac{df}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_o} + j \cdot \frac{(\omega - \omega_o)^2}{2!} \cdot \left.\frac{df}{d\omega}\right|^2_{\omega=\omega_o} + \ldots$$

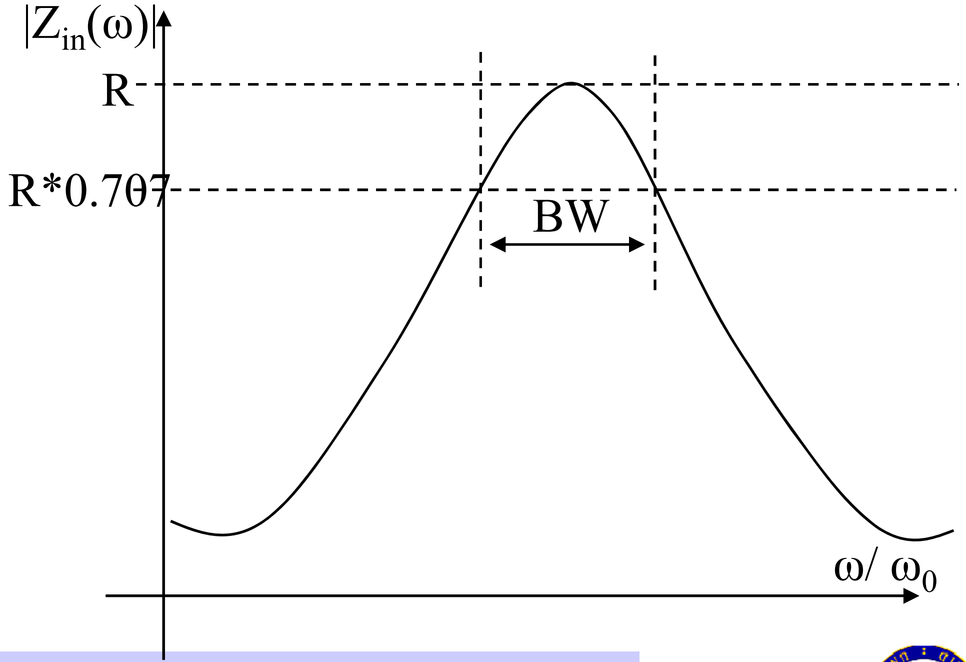
$$Z_{in}(\omega) = R_s + j \cdot (\omega - \omega_o) \cdot 2L_s = \boxed{R_s + j \cdot (\Delta\omega) \cdot 2L_s}$$

$$\boxed{Z_{in}(\omega) = R_s + j \cdot (\Delta\omega) \cdot 2 \cdot \frac{R_s \cdot Q}{\omega_o} = R_s \cdot (1 + j \cdot Q \cdot \alpha)} \qquad \frac{(\Delta\omega) \cdot 2}{\omega_o} = \alpha$$

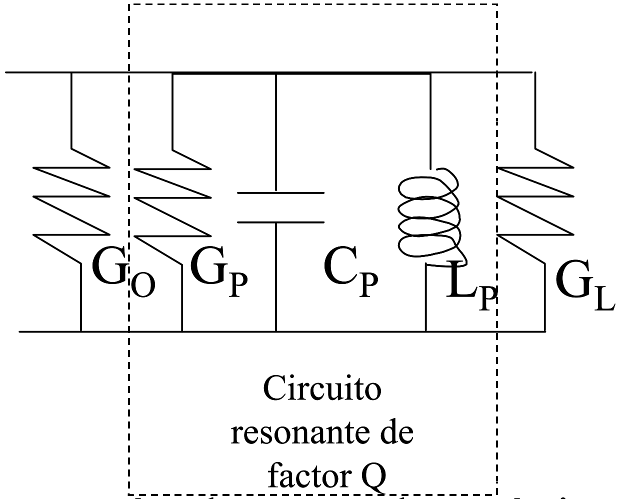
INTRODUCCIÓN IV: CIRCUITO RESONANTE PARALELO

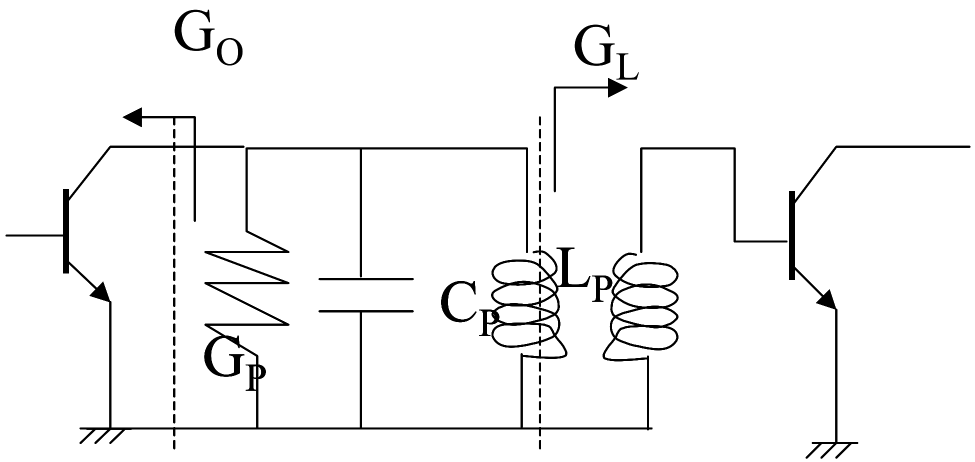
- Definición:
  - Resonancia paralelo o circuito antirresonante: en sus bornes hay máximo de voltaje y mínimo de corriente lo que supone máximo del módulo de la impedancia.
- Configuración del circuito serie y representación del módulo de su impedancia
  - Las expresiones que rigen su funcionamiento son las duales de las del circuito serie.





FACTOR DE CALIDAD CARGADO, AISLADO Y EXTERIOR





- La energía almacenada es única por lo que la variación del factor de calidad irá ligada a la variación en las pérdidas que pueda haber.
- Si pudieran separarse los efectos de las pérdidas dependiendo de si la causa fuera interna o externa al circuito tendríamos:
  - Factor de calidad aislado o en vacío, Q: las pérdidas se deben exclusivamente al circuito resonador.
  - Factor de calidad exterior, Q_{ex}, las pérdidas se deben a los circuitos exteriores a que se conecta el resonador
  - Factor de calidad cargado: incluye todos los efectos de pérdidas, internos y externos, y es el que realmente se puede medir, Q_L.

FACTOR DE CALIDAD: CONEXIÓN DE RESONADORES

- Hay tantos factores de calidad externos cuantas conexiones del resonador tengamos al exterior. Así se pueden clasificar los resonadores por su conexión:
  - Resonadores a reflexión: solo existe un terminal que aporta energía al resonador. Tiene una configuración tipo dipolo y hay un solo Q_{ext}
  - Resonadores a transmisión: se aporta energía al resonador por un terminal y se extrae por otro. Tiene una configuración tipo cuadripolo y hay dos Q_{ext}: Q_{ext1} y Q_{ext2}
- Si la energía almacenada es común y las pérdidas han podido separarse el factor de calidad cargado, que es el que se puede medir, viene dado por:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex1}} + \frac{1}{Q_{ex2}}$$

- Si las resistencias exteriores son R_{ex1} y R_{ex2}

$$Q_{ex1} = \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_{ex1}} = \frac{\omega_o \cdot L_s \cdot R_s}{R_{ex1} \cdot R_s} = Q \cdot \frac{R_s}{R_{ex1}};$$

$$Q_{ex2} = \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_{ex2}} = \frac{\omega_o \cdot L_s \cdot R_s}{R_{ex2} \cdot R_s} = Q \cdot \frac{R_s}{R_{ex2}}$$

- Que para el circuito paralelo resulta: $Q_{ex1} = \frac{\omega_o \cdot C_p}{G_{ex1}} = \frac{\omega_o \cdot C_p \cdot G_p}{G_{ex1} \cdot G_p} = \boxed{Q \cdot \frac{G_p}{G_{ex1}}} = \frac{R_{ex1}}{\omega_o \cdot L_p} = Q \cdot \frac{R_{ex1}}{R_p}$

FACTOR DE ACOPLAMIENTO

- Relación entre los factores de calidad externo e interior: s

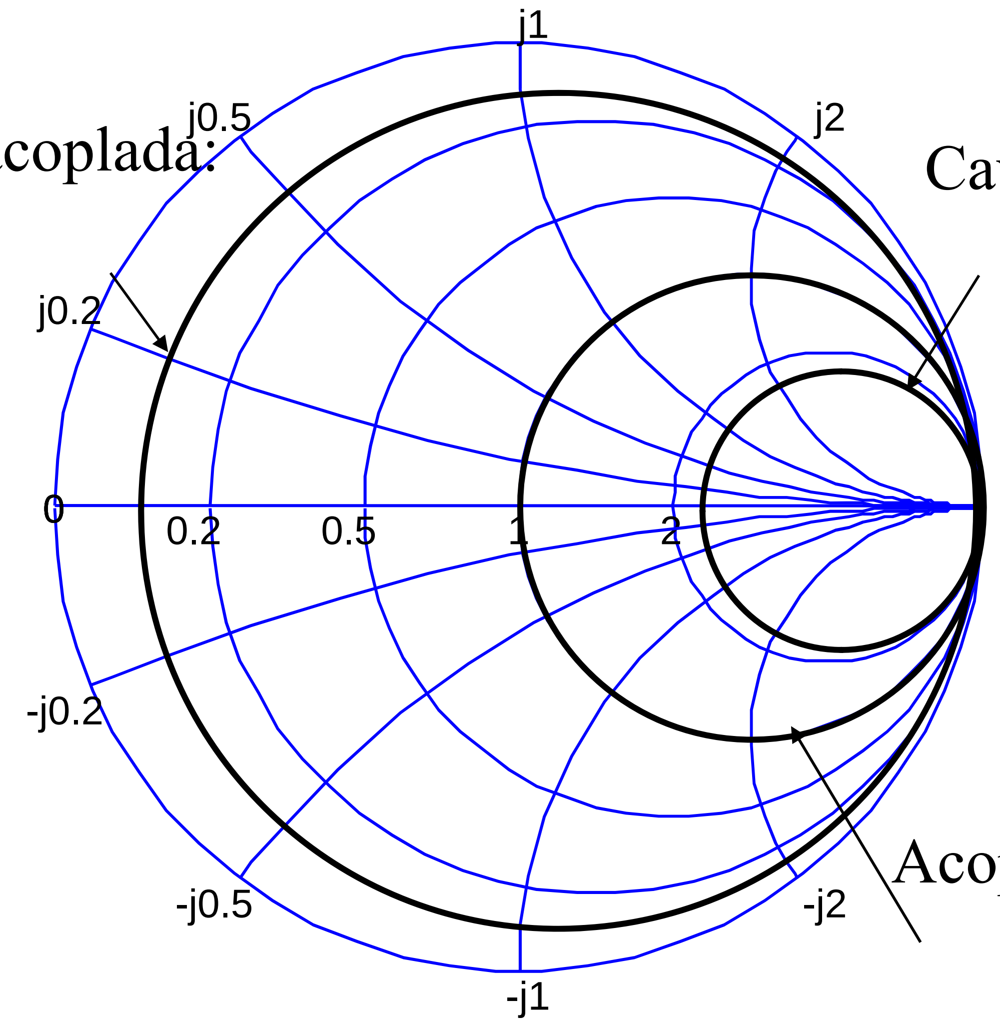
$$s = \frac{Q}{Q_{ex}} = \frac{Pérdidas\ \ en\ \ el\ \ circuito\ \ exterior}{Pérdidas\ \ en\ \ el\ \ resonador} = \begin{cases} serie: \dfrac{\frac{1}{2}\cdot|I|^2\cdot R_{ex}}{\frac{1}{2}\cdot|I|^2\cdot R_s} = \dfrac{R_{ex}}{R_s} \\ paralelo: \dfrac{\frac{1}{2}\cdot|V|^2\cdot G_{ex}}{\frac{1}{2}\cdot|V|^2\cdot G_p} = \dfrac{G_{ex}}{G_p} = \dfrac{R_p}{R_{ex}} \end{cases}$$

- Si se normaliza la resistencia exterior a un valor 1 resulta:
  - Resonador serie: s= $1/r_s$
  - Resonador paralelo: s=$1/g_p$
- Clasificación de resonadores atendiendo al factor de acoplamiento:
  - Resonador subacoplado: s<1→Q<Q_{ext} (pérdidas en el resonador mayores que en el circuito exterior)→ r_s>1 (para circuito serie)
  - Resonador sobreacoplado: s>1 →Q>Q_{ext} (pérdidas en el resonador menores que en el circuito exterior)
  - Acoplmiento crítico: s=1

REPRESENTACIÓN DE LOS FACTORES DE ACOPLAMIENTO

Cavidad sobreacoplada: $R_S < Z_O$

Cavidad subacoplada: $R_S > Z_O$

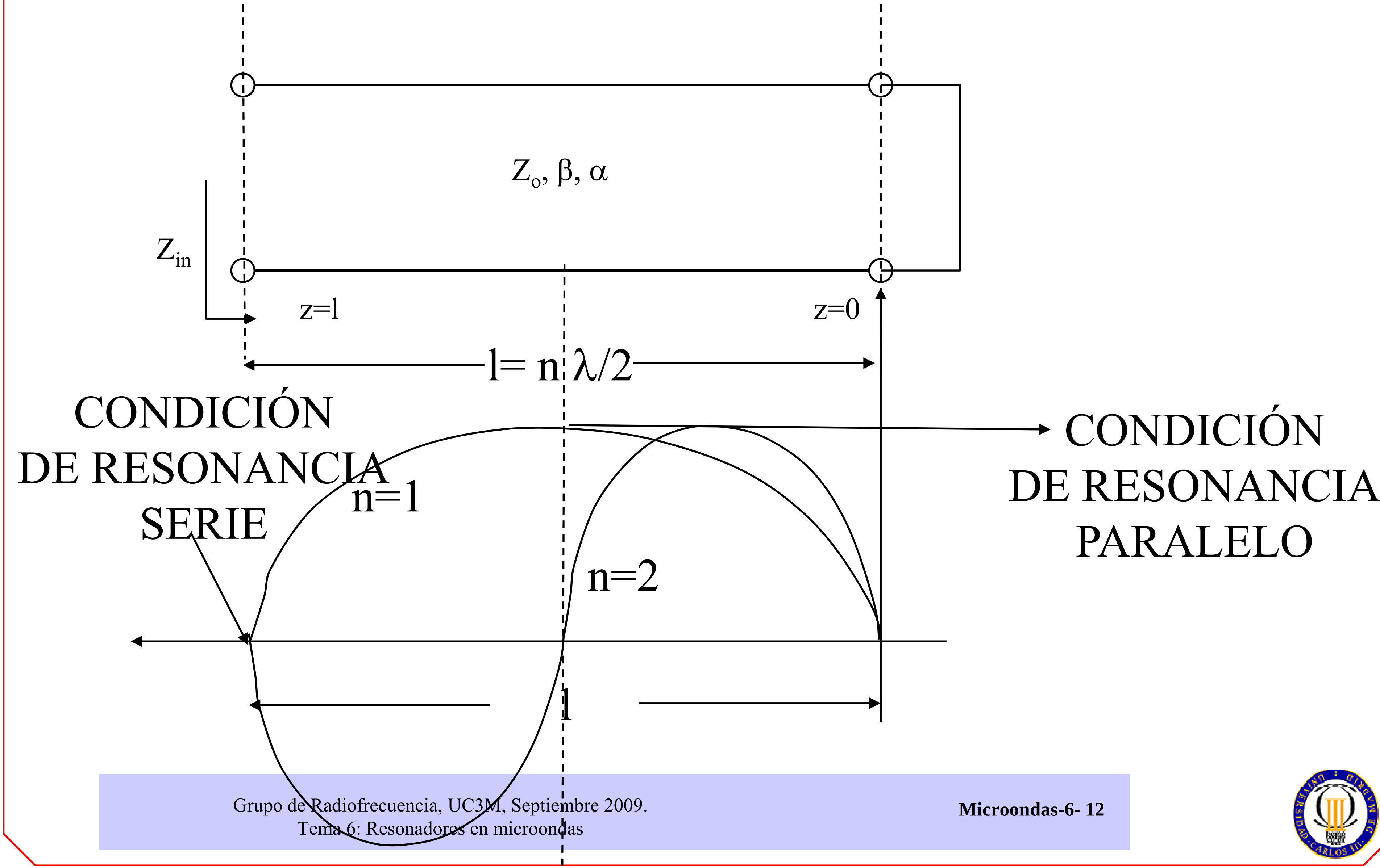


Acoplamiento crítico: $R_S = Z_O$

RESONADORES EN ALTA FRECUENCIA

- Inconvenientes en alta frecuencia:
  - El aumento de la frecuencia de resonancia supone reducir la inductancia o capacidad: caso límite, reducción a un hilo, concepto de línea de transmisión.
  - Una bobina acaba siendo auto resonante: capacidades parásitas y resistencias parásitas
  - En un circuito no cerrado el efecto de la radiación se hace no despreciable.
- Conclusiones sobre alta frecuencia:
  - Una sección de línea de transmisión puede resonar en determinadas circunstancias.
  - Se puede reducir las pérdidas cerrando la estructura y pasando al concepto de cavidad resonante.
  - Los conceptos de resonancia serie y paralelo siguen siendo válidos pero se repiten cada media longitud de onda.
- Tipos de resonadores en alta frecuencia:
  - Basados en líneas de transmisión
  - Cavidades resonantes
  - Resonadores dieléctricos

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN RESONANTES



ANÁLISIS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN RESONANTES

- Valores de voltaje y corriente en cualquier punto de la línea:

$$V(z) = V_o \cdot \left(e^{-j\beta \cdot z} + \Gamma \cdot e^{j\beta \cdot z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_o}{Z_o} \cdot \left(e^{-j\beta \cdot z} - \Gamma \cdot e^{j\beta \cdot z}\right)$$

- Supongamos que está acabada en cortocircuito

$$V(z) = V_o \cdot \left(e^{-j\beta \cdot z} - \cdot e^{j\beta \cdot z}\right) = -2j \cdot V_o \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot z$$

$$I(z) = \frac{V_o}{Z_o} \cdot \left(e^{-j\beta \cdot z} + \cdot e^{j\beta \cdot z}\right) = \frac{2V_o}{Z_o} \cdot \cos \beta \cdot z$$

- Condición de resonancia:

$$W_H = \frac{1}{4} \cdot L \cdot \int_0^l I(z) \cdot I^*(z) = \frac{I_o^2 \cdot L \cdot l}{2} \cdot \left[1 + \frac{\operatorname{sen}(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l}\right]$$

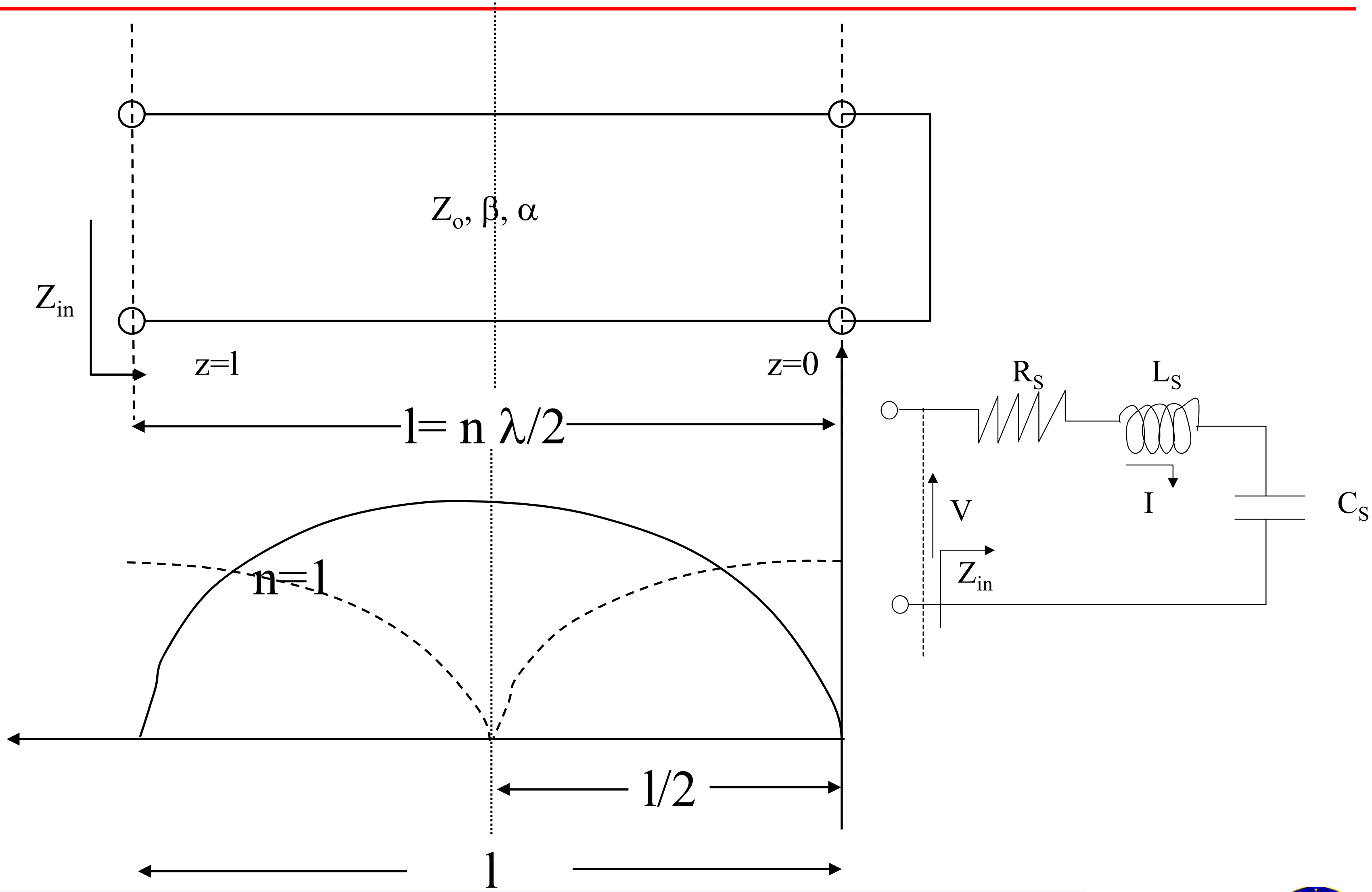
$$W_E = \frac{1}{4} \cdot C \cdot \int_0^l V(z) \cdot V^*(z) = \frac{I_o^2 \cdot L \cdot l}{2} \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sen}(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l}\right]$$

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \int_0^l I(z) \cdot I^*(z) + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \int_0^l V(z) \cdot V^*(z) = I_o^2 \cdot l \cdot \left[\left(R + G \cdot Z_o^2\right) + \frac{\operatorname{sen}(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l} \cdot \left(R - G \cdot Z_o^2\right)\right]$$

- Frecuencias de resonancia

$$\operatorname{sen}(2\beta \cdot l) = 0 \Rightarrow l = n \cdot \frac{\lambda}{4}; n = 1,2,3,\ldots \longrightarrow l = n \cdot \frac{\lambda}{4} = n \cdot \frac{v_p}{4 f_{on}} = n \cdot \frac{c}{4 f_{on} \cdot \sqrt{\varepsilon_{eff}}}; \Rightarrow f_{on} = n \cdot \frac{c}{4 \cdot l \cdot \sqrt{\varepsilon_{eff}}}$$

RESONANCIA SERIE (I)



RESONANCIA SERIE (II)

- Valor de la impedancia:

$$Z_{in} = Z_o \left. \frac{Z_L + Z_o \cdot \mathrm{tgh}(\gamma \cdot l)}{Z_o + Z_L \cdot \mathrm{tgh}(\gamma \cdot l)} \right|_{Z_L=0} = Z_o \cdot \mathrm{tgh}((\alpha + j\beta)\cdot l) = Z_o \frac{\mathrm{tgh}(\alpha \cdot l) + j \cdot \mathrm{tg}(\beta \cdot l)}{1 + j \cdot \mathrm{tgh}(\alpha \cdot l) \cdot \mathrm{tg}(\beta \cdot l)}$$

- Considerando una línea de bajas pérdidas:

$$\mathrm{tgh}(\alpha \cdot l) \cong \alpha \cdot l \qquad \mathrm{tg}(\beta \cdot l) = \mathrm{tg}\left(\pi + \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}\right) \approx \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}$$

- Valor de la impedancia:

$$Z_{in} \approx Z_o \left. \frac{\alpha \cdot l + j \cdot \left(\Delta\omega \cdot \pi / \omega_o\right)}{1 + j \cdot \alpha \cdot l \cdot \left(\Delta\omega \cdot \pi / \omega_o\right)} \right|_{\alpha \cdot l \cdot \left(\Delta\omega \cdot / \omega_o\right) << 1} \approx Z_o \cdot \left(\alpha \cdot l + j \cdot \Delta\omega \cdot \pi / \omega_o\right)$$

- Parámetros del resonador

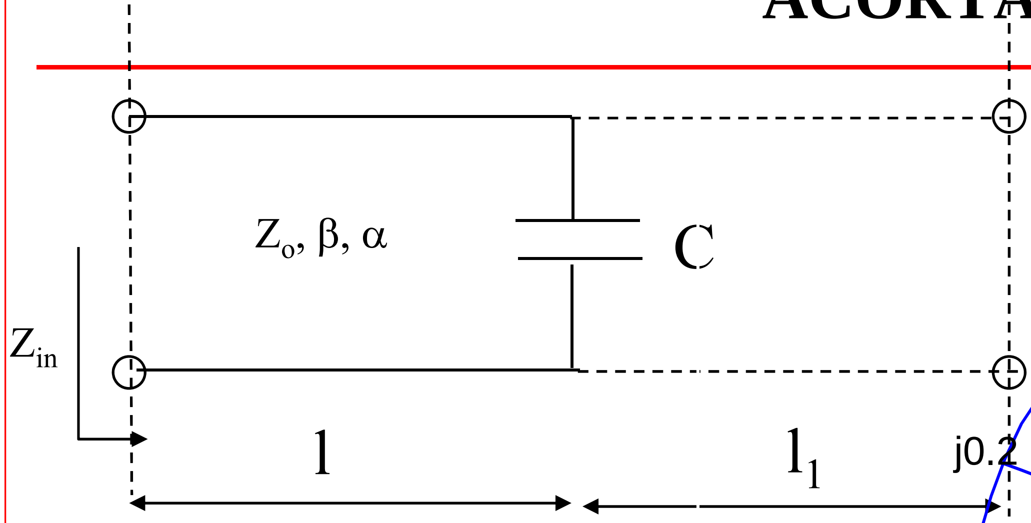
$$\boxed{\begin{aligned} &R_s = Z_o \cdot \alpha \cdot l; \quad L_s = \frac{Z_o \cdot \pi}{2\omega_o} \\ &Q = \frac{\omega_o \cdot L}{R} = \left. \frac{\pi}{2\alpha \cdot l} \right|_{resonancia} = \frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned}}$$

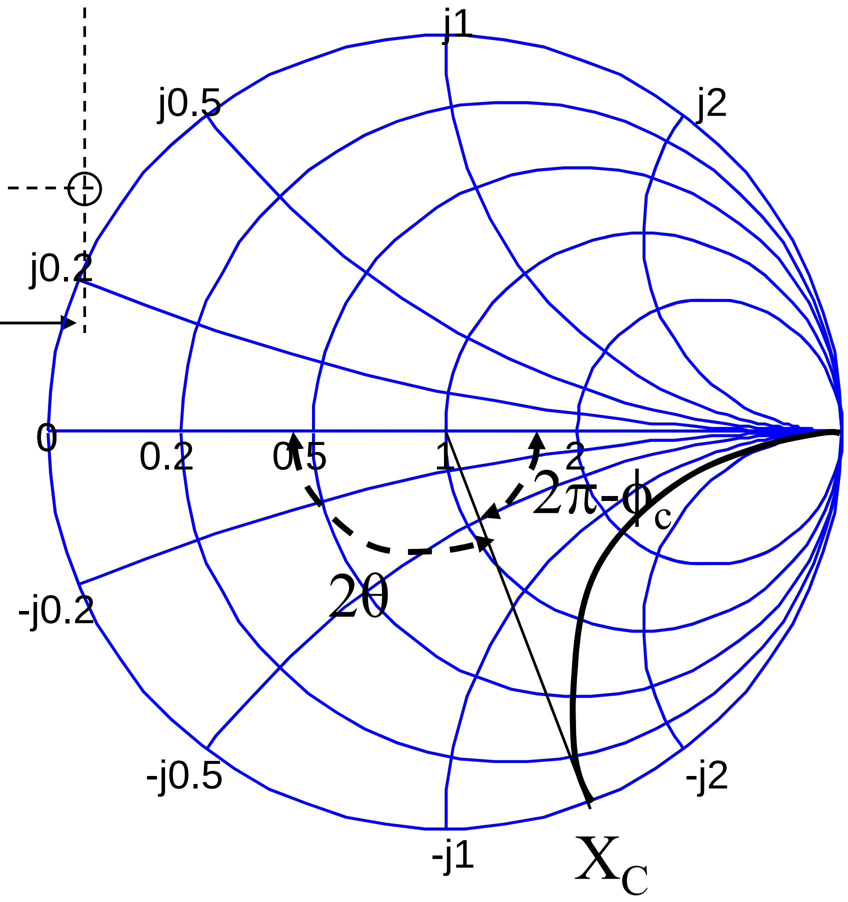
LÍNEAS DE TRANSMISIÓN RESONANTES CERRADAS POR AMBOS EXTREMOS

- En el caso de que las líneas de transmisión se encuentren cerradas por ambos extremos la resonancia existirá cuando se cumpla la condición en ambos lados. Esto quiere decir que será a múltiplos de media longitud de onda.
- La condición de resonancia en este caso será:

$$Z_{in}^{d}(x) + Z_{in}^{i}(x) = 0$$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN RESONANTES ACORTADAS





$$\phi_C - 2\theta = \pi$$

$$\phi_C = \pi + 2\arctan\left(\frac{X_C}{Z_o}\right)$$

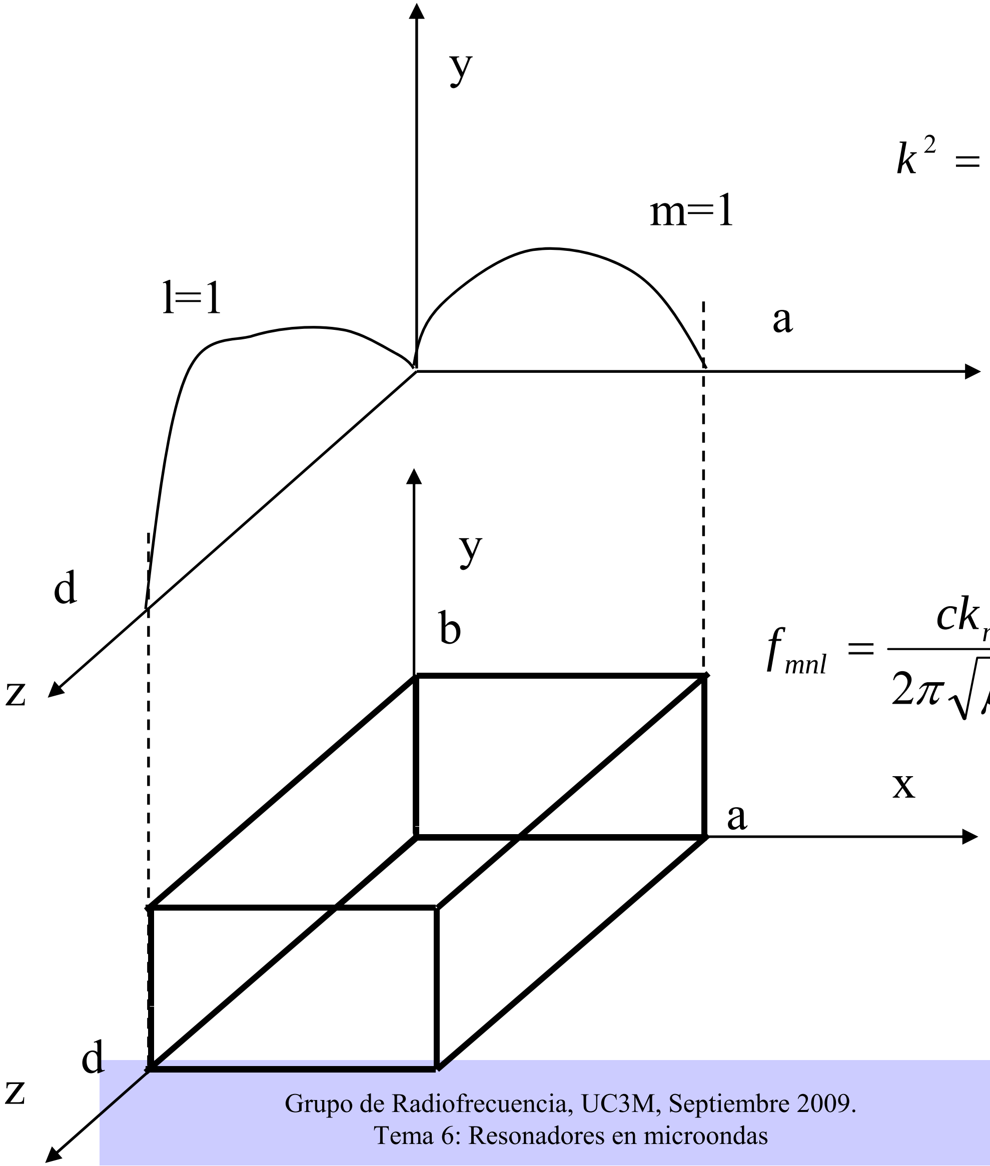
$$\tan\theta = \frac{1}{w \cdot C_1 \cdot Z_0}$$

CAVIDADES RESONANTES (I)

- Definición: volumen cerrado por paredes conductoras metálicas dentro del cual se introduce y extrae energía por diversos métodos.
- Análisis más complicado que en líneas de transmisión porque hay infinitos modos de propagación.
  - En modos TEM existen voltajes y corrientes definidos de forma unívoca
  - El estudio se hace a partir del modo de la guía y se particulariza para unas condiciones de cierre determinadas.
- Campo en una guía: $\overline{E}_t(x,y,z)=\overline{e}(x,y)\left[A^+e^{-j\beta_{mn}z}+A^-e^{j\beta_{mn}z}\right]$
- Constante de fase en una guía $\beta_{mn}=\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
- Si se cierra en z=0 por un cortocircuito perfecto $\overline{E}_t=0 \quad A^+=-A^-$

$$\overline{E}_t(x,y,d)=-\overline{e}(x,y)A^+2j\sin\beta_{mn}d=0 \quad \beta_{mn}d=l\pi \quad l=1,2,3,\ldots,$$

CAVIDADES RESONANTES (II)



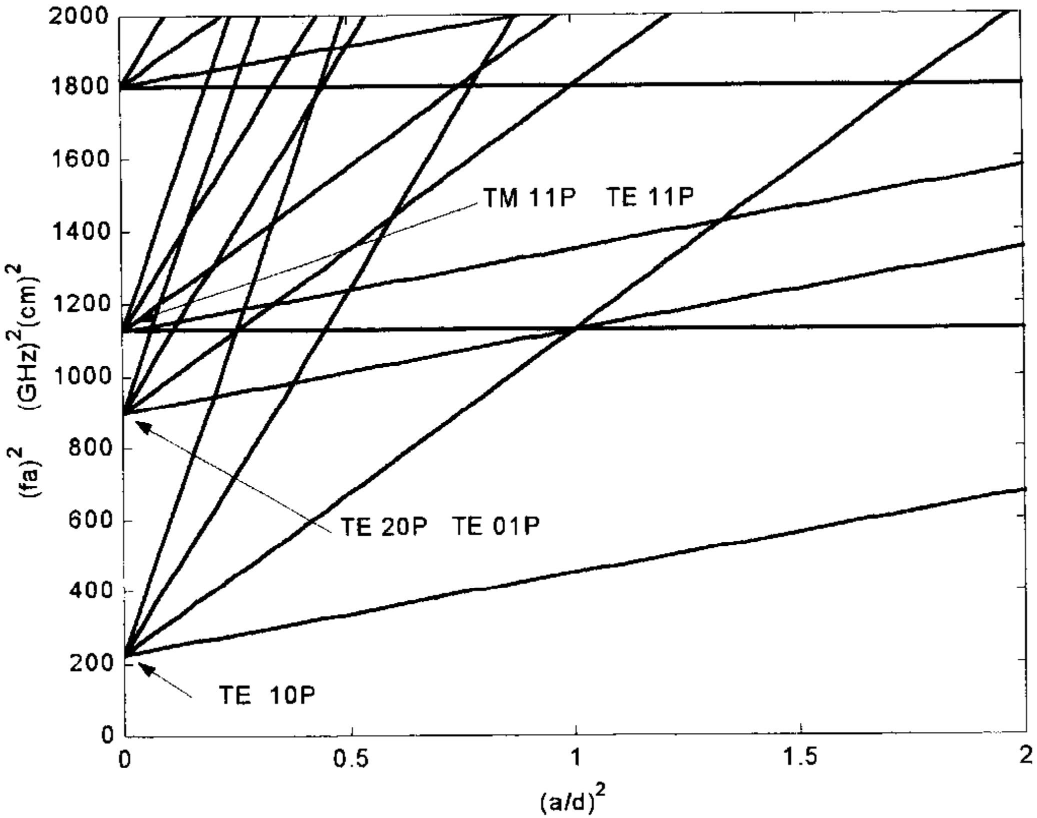
$$k^2 = k_c^2 + \beta^2 \Rightarrow k_{mnl} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

$$f_{mnl} = \frac{ck_{mnl}}{2\pi\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

CAVIDADES RESONANTES (III)

Si dividimos la expresión $k^2 = k_c^2 + \beta^2 \Rightarrow k_{mnl} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$

por el número de onda de corte asociado al TE_{10} resulta



$$\left(\frac{2af_0}{c}\right)^2 = \left(\frac{k_c}{k_{c10}}\right)^2 + l^2\left(\frac{a}{d}\right)^2$$

FACTOR DE CALIDAD DE UNA CAVIDAD RECTANGULAR CON EL MODO TE$_{101}$

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{l\pi z}{d}$$

$$H_x = \frac{-jE_0}{Z_{TE}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{l\pi z}{d}$$

$$H_z = \frac{j\pi E_0}{k\eta a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{l\pi z}{d}$$

$$\left\{\begin{aligned}
W_e &= \frac{\varepsilon}{4}\int_V E_y E_y^* dv = \frac{\varepsilon abd}{16}E_0^2 \\
W_m &= \frac{\mu}{4}\int_V \left(H_x H_x^* + H_z H_z^*\right)dv = \frac{\mu abd}{16}E_0^2\left(\frac{1}{Z_{TE}^2}+\frac{\pi^2}{k^2\eta^2 a^2}\right) \\
P_c &= R_s\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\left|H_x(z=0)\right|^2 dxdy + R_s\int_{z=0}^{d}\int_{y=0}^{b}\left|H_z(x=0)\right|^2 dydz \\
&\quad + R_s\int_{z=0}^{d}\int_{x=0}^{a}\left[\left|H_x(y=0)\right|^2+\left|H_z(y=0)\right|^2\right]dxdz \\
&= \frac{R_s E_0^2\lambda^2}{8\eta^2}\left(\frac{l^2ab}{d^2}+\frac{bd}{a^2}+\frac{l^2a}{2d}+\frac{d}{2a}\right)
\end{aligned}\right.$$

$$Q_c = \frac{2\omega_0 W_e}{P_c} = \frac{k^3 abd\eta}{4\pi^2 R_s}\frac{1}{\left[\left(\frac{l^2ab}{d^2}+\frac{bd}{a^2}+\frac{l^2a}{2d}+\frac{d}{2a}\right)\right]}$$

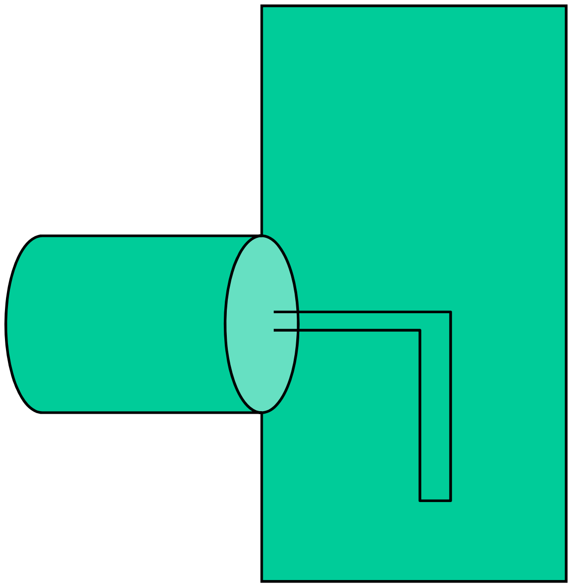
$$= \frac{(kad)^3 b\eta}{2\pi^2 R_s}\frac{1}{\left[\left(2l^2a^3b + 2bd^3 + l^2a^3d + ad^3\right)\right]}$$

$$Q_d = \frac{2\omega W_e}{P_d} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan\delta}$$

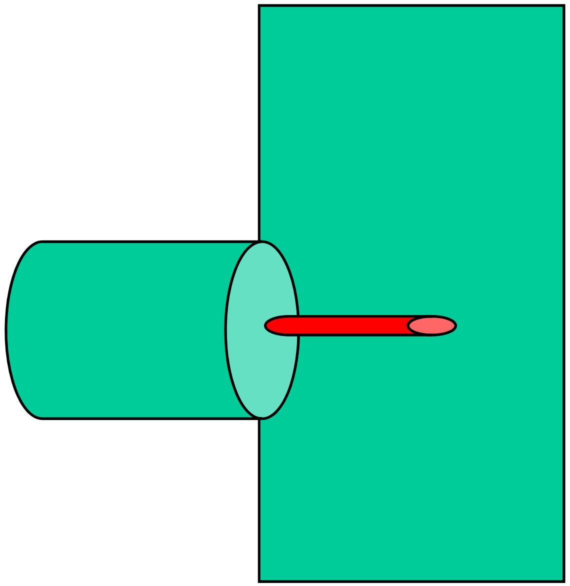
$$\boxed{Q = \left(\frac{1}{Q_c}+\frac{1}{Q_d}\right)^{-1}}$$

EXCITACIÓN DE RESONADORES (I)

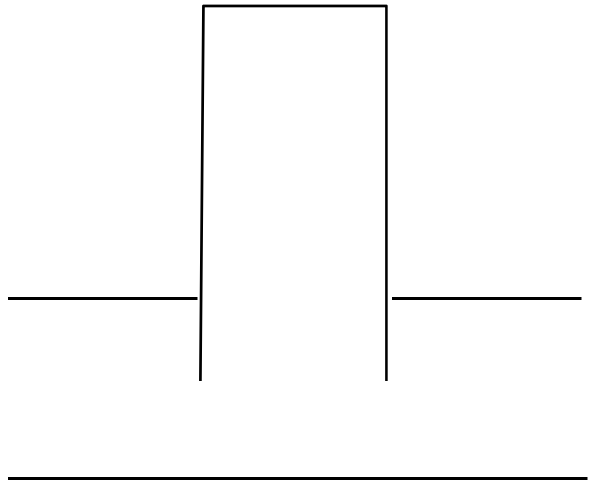
Sonda magnética



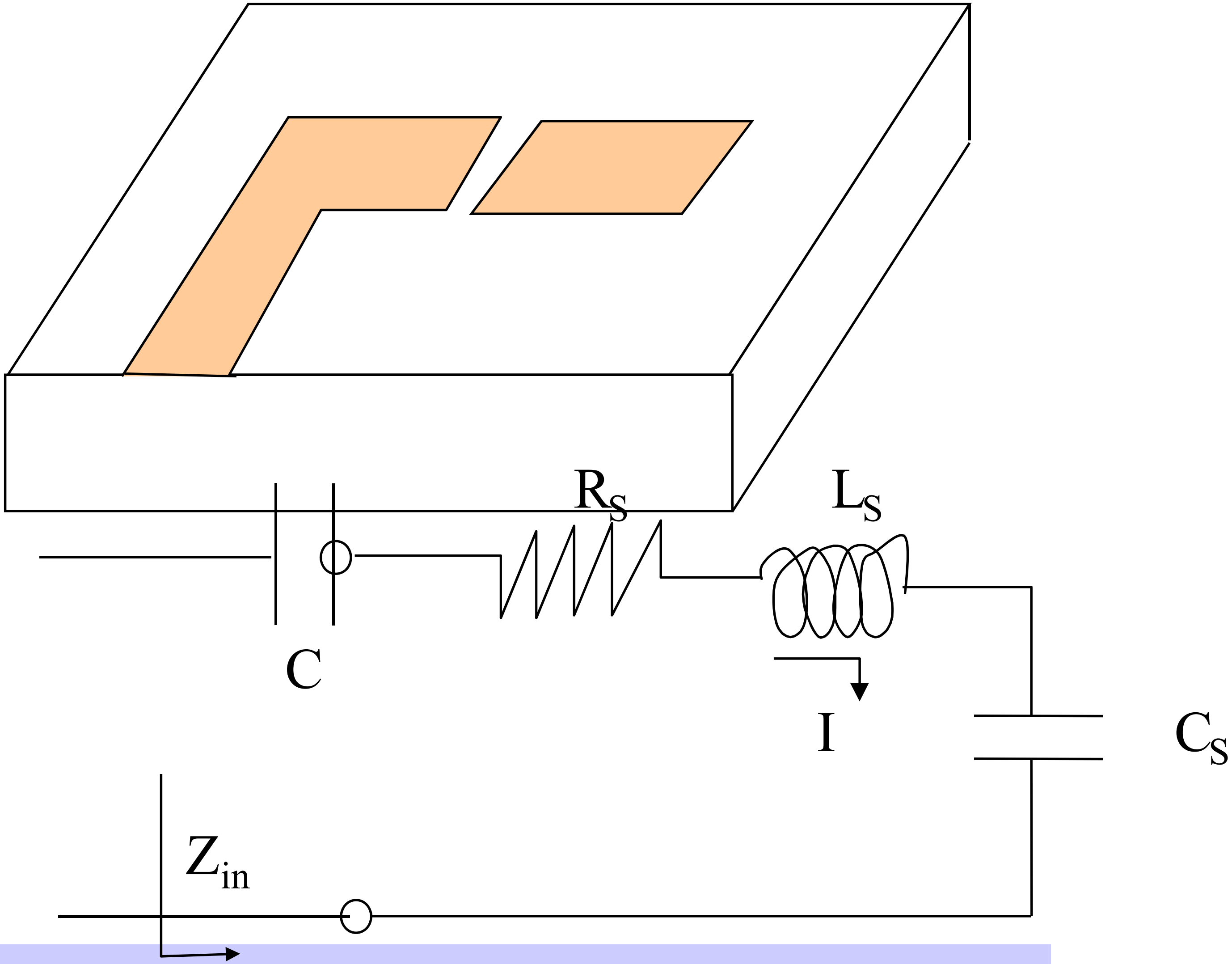
Sonda eléctrica



Apertura



EXCITACIÓN DE RESONADORES IMPRESOS (I)



BIBLIOGRAFÍA

- Apuntes de resonadores, Daniel Segovia
- Pozar, capítulo 6
- Collin, capítulo 7