



Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

## **MATEMÁTICAS II. Apuntes**

**Curso preparatorio para el acceso a la universidad  
para mayores de 25 años**

**Tema 1**

Arturo de Pablo  
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



---

# Índice general

|                        |    |
|------------------------|----|
| 1. CÁLCULO DIFERENCIAL | 3  |
| 2. CÁLCULO INTEGRAL    | 28 |
| 3. ÁLGEBRA LINEAL      | 43 |
| 4. GEOMETRÍA           | 59 |

# 1

---

## CÁLCULO DIFERENCIAL

Este primer tema está dedicado al cálculo: el estudio de las funciones, sus propiedades principales, límites, derivadas y representación gráfica.

### Contenido

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Funciones de variable real . . . . .                  | 4  |
| 1.1.1. La recta real: Clases de números . . . . .          | 4  |
| 1.1.2. Desigualdades. Valor absoluto . . . . .             | 4  |
| 1.1.3. El plano . . . . .                                  | 6  |
| 1.1.4. Funciones. Definiciones básicas . . . . .           | 7  |
| 1.1.5. Polinomios, funciones racionales y raíces . . . . . | 8  |
| 1.1.6. Funciones trigonométricas . . . . .                 | 8  |
| 1.1.7. Logaritmos y exponenciales . . . . .                | 10 |
| 1.1.8. Operaciones con funciones . . . . .                 | 11 |
| 1.2. Límites . . . . .                                     | 12 |
| 1.2.1. Definición de límite y propiedades . . . . .        | 12 |
| 1.2.2. Límites laterales . . . . .                         | 13 |
| 1.2.3. Límites infinitos y en el infinito . . . . .        | 14 |
| 1.2.4. Operaciones con infinitos . . . . .                 | 15 |
| 1.2.5. Límites relacionados con la exponencial . . . . .   | 16 |
| 1.3. Continuidad . . . . .                                 | 16 |
| 1.3.1. Definición . . . . .                                | 16 |
| 1.3.2. Propiedades . . . . .                               | 17 |
| 1.4. Cálculo diferencial . . . . .                         | 17 |
| 1.4.1. Concepto de derivada . . . . .                      | 17 |
| 1.4.2. Cálculo de derivadas . . . . .                      | 19 |
| 1.4.3. Regla de L'Hôpital . . . . .                        | 20 |
| 1.4.4. Máximos y mínimos . . . . .                         | 21 |

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 1.5. Gráficas de funciones . . . . .                          | 22 |
| 1.5.1. Dominio, simetrías, periodicidad y asíntotas . . . . . | 22 |
| 1.5.2. Crecimiento, decrecimiento y extremos . . . . .        | 23 |
| 1.5.3. Convexidad, concavidad y puntos de inflexión . . . . . | 24 |

## 1.1 Funciones de variable real

### 1.1.1 La recta real: Clases de números

1. **Naturales:**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  con la suma  $(+)$  y el producto  $(\cdot)$ .

Propiedades:  $(+)$  asociativa, conmutativa, elemento neutro  $(0)$ ,

$(\cdot)$  asociativa, conmutativa, elemento neutro  $(1)$ ,

$(+, \cdot)$  distributiva.

Problema:  $x + 3 = 0$  no tiene solución  $x \in \mathbb{N}$ .

2. **Enteros:**  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ .

Propiedades:  $(+)$  elemento inverso.

Problema:  $2x + 3 = 0$  no tiene solución  $x \in \mathbb{Z}$ .

3. **Racionales:**  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$  (los dos puntos en esta expresión significan "tal que").

Propiedades:  $(\cdot)$  elemento inverso salvo para el 0.

Problema:  $x^2 - 2 = 0$  no tiene solución  $x \in \mathbb{Q}$ .

4. **Reales:**  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{ \text{números con infinitas cifras decimales no periódicas} \}$  (en principio).

Propiedades: Completitud.

Problema:  $x^2 + 2 = 0$  no tiene solución  $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$  números complejos!!

### 1.1.2 Desigualdades. Valor absoluto

1. **Relación de orden.** Cada  $a \in \mathbb{R}$  verifica una y solo una de las condiciones:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad a < 0.$$

**PROPIEDADES:**

$$a > b \iff a - b > 0.$$

$$a \geq b \iff a > b \quad \text{o} \quad a = b.$$

$$a > b \text{ y } c > 0 \implies ac > bc.$$

$$a > b \text{ y } c < 0 \implies ac < bc.$$

2. **Valor absoluto:** Se define por  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

**PROPIEDADES:**

$$|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad |a| = 0 \iff x = 0.$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

3. **Distancia.** Se define por  $\text{dist}(a, b) = |a - b|$ .

4. **Intervalos. Subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .** Hay de varios tipos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ es un } \mathbf{intervalo \text{abierto}}.$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ es un } \mathbf{intervalo \text{cerrado}}.$$

$$\{a\} \text{ es un } \mathbf{punto \text{aislado}}.$$

$A \subset \mathbb{R}$  general puede ser una unión de intervalos y puntos aislados.

$A$  es **acotado superiormente** si  $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M \quad \forall x \in A$ .

$M$  se denomina **cota superior**. Análogamente se definen **acotado inferiormente** y **cota inferior**. Se dice que  $A$  es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

La cota superior mínima de  $A$  se denomina **supremo** y se denota por  $\sup(A)$  y la cota inferior máxima **ínfimo**, y se denota por  $\inf(A)$ . Si  $\sup(A) \in A$  se denomina **máximo** y si  $\inf(A) \in A$  se denomina **mínimo**.

**Ejemplo 1.**

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, -1) \leq 4\} &= \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x + 1 \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 3\} = [-5, 3] \end{aligned}$$

El conjunto es acotado,  $-5$  es el mínimo y  $3$  es el máximo, se trata de un intervalo cerrado.

### 1.1.3 El plano

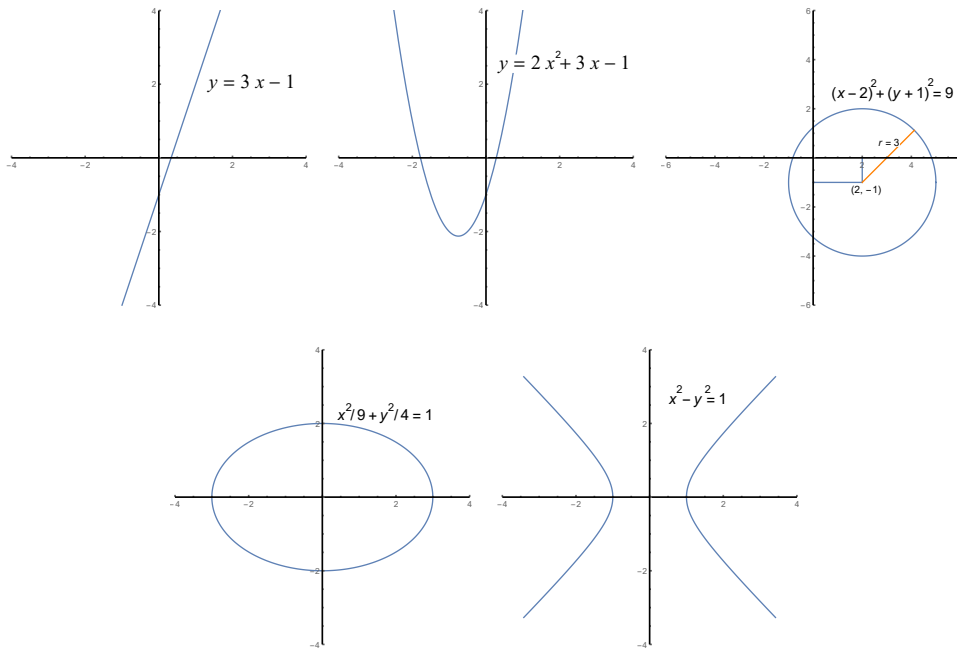
Es el conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ . Los elementos se llaman pares, puntos o vectores.

La **distancia** entre dos puntos  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  se define por

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Curvas elementales:**

1. Recta:  $ax + by + c = 0$  (o también  $y = \alpha x + \beta$  si  $b \neq 0$ ).
2. Parábola:  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .
3. Circunferencia de centro  $(c_1, c_2)$  y radio  $r$ :  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ .
4. Elipse de centro el origen y semiejes  $a$  y  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
5. Hipérbola centrada en el origen:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



**Figura 1.1:** Gráficas de una recta, una parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola.

### 1.1.4 Funciones. Definiciones básicas

Una **función** es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y solo uno a cada número de un cierto conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ . Se escribe  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f(x)$  es el valor de la función  $f$  en el punto  $x$ .

El **dominio** de una función es el conjunto de números para los que está definida,  $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}$ . (Si no se especifica nada, se sobreentiende que el dominio está formado por todos los números para los cuales tiene sentido la definición.) La **imagen** es el conjunto de todos los valores que alcanza la función,  $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in \text{Dom}(f)\}$ .

La **gráfica** es la curva formada por los puntos  $(x, f(x))$  del plano, es decir, la segunda coordenada es la imagen mediante  $f$  de la primera coordenada.

**Ejemplo 2.** Dominio de algunas funciones:

Polinomios:  $\text{Dom} = \mathbb{R}$ .

Cocientes de polinomios:  $\text{Dom} = \{\text{denominador distinto de cero}\}$ .

$f(x) = \sqrt{x}$ :  $\text{Dom} = \{x \geq 0\}$ .

Decimos que  $f : A \rightarrow B$  es **inyectiva** si no existen dos puntos distintos con la misma imagen, es decir  $f(x_1) = f(x_2)$  implica  $x_1 = x_2$ ; es **sobreyectiva** si dado  $y \in B$  existe al menos un  $x \in A$  con  $f(x) = y$ ; es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez ( $\forall y \in B$  existe un único  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ ). En la gráfica de la función: si cada línea horizontal corta (respectivamente) como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la curva.

Consideramos también las **simetrías**:

1. Decimos que  $f$  es simétrica **par** si  $f(-x) = f(x)$ . La gráfica es simétrica respecto al eje  $y$ .

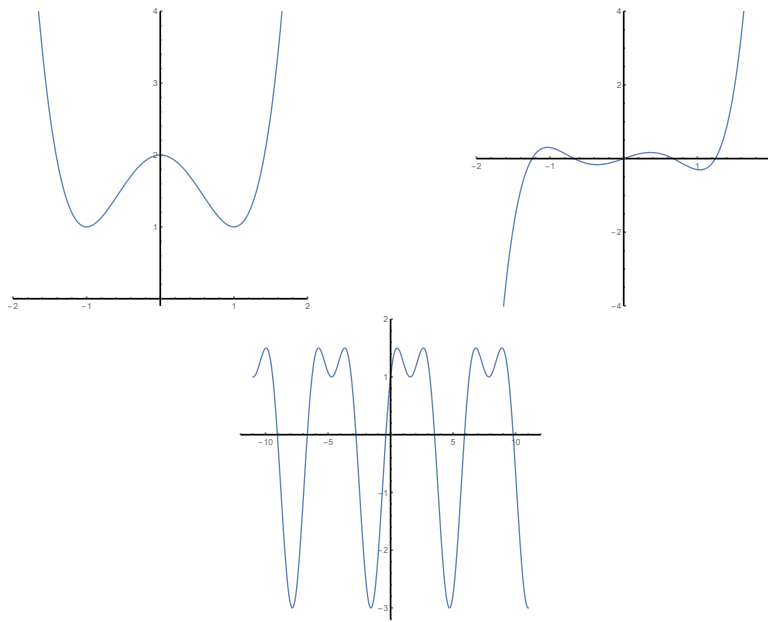
**Ejemplo 3.**  $f(x) = x^2$ .

2.  $f$  es simétrica **impar** si  $f(-x) = -f(x)$ .

**Ejemplo 4.**  $f(x) = x^3$ .

Una función  $f$  es **periódica** de periodo  $T$  si:

$$f(x + kT) = f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



**Figura 1.2:** Ejemplo de una función simétrica par, una impar y una periódica.

### 1.1.5 Polinomios, funciones racionales y raíces

Un **polinomio** se escribe en general:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde los números  $a_0, \dots, a_n$  son reales y  $a_n \neq 0$ . El **grado** del polinomio anterior es  $n$ . Su dominio es todo  $\mathbb{R}$  y la imagen de los de grado impar también es todo  $\mathbb{R}$ , pero no es así con los de grado par.

Los cocientes de dos polinomios se llaman **funciones racionales** y su dominio es todo  $\mathbb{R}$  salvo los puntos en que se anula el denominador.

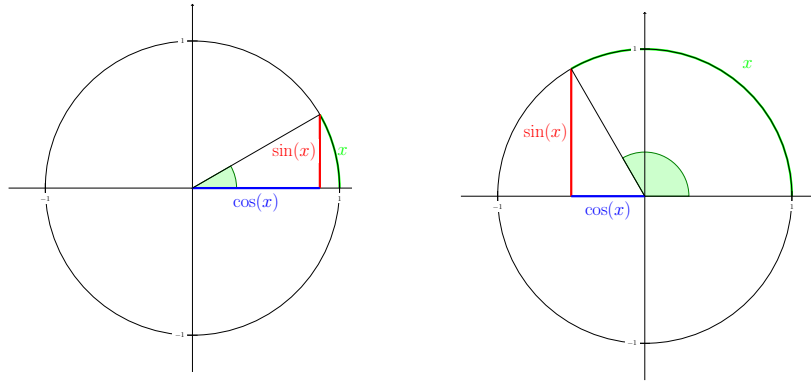
Las **raíces cuadradas** o de orden par solo están definidas si el radicando es mayor o igual que cero. Las raíces de orden impar están definidas siempre.

### 1.1.6 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas básicas son: **seno** y **coseno**.

El coseno de  $x$  ( $\cos(x)$ ) es la abscisa de un punto de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen que forma un ángulo  $x$  con el eje horizontal. El seno de  $x$  ( $\sin(x)$ ) es la ordenada de ese punto.





**Figura 1.3:** Interpretación geométrica de seno y coseno.

A partir de ellas se definen tangente, cotangente, secante y cosecante:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$

$$\operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},$$

junto con sus funciones inversas que definiremos más adelante.

Mediremos los ángulos en **radianes**. Un radián es el ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia. Así,  $360^\circ$  son  $2\pi$  radianes, y  $90^\circ$  son  $\pi/2$  radianes. De esta manera, la longitud sobre la circunferencia de radio uno del arco de ángulo  $x$  es precisamente  $x$ .

#### PRINCIPALES PROPIEDADES:

1.  $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$ .
2.  $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cos}(x)) = \mathbb{R}$ .  $\operatorname{Img}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{Img}(\operatorname{cos}(x)) = [-1, 1]$ .
3. Las funciones seno y coseno tienen periodo  $2\pi$ :

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos}(x).$$

4. El coseno es par y el seno es impar.

5. Fórmulas para la suma, diferencia y ángulo doble:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x), \\ \operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x), \\ \operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

6. Relaciones geométricas (se pueden observar en la gráfica y se deducen de las fórmulas anteriores):

$$\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos(x), \quad \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x).$$

7. De todas estas propiedades se pueden deducir las correspondientes para  $\operatorname{tg}(x)$  y las demás funciones trigonométricas.

### 1.1.7 Logaritmos y exponenciales

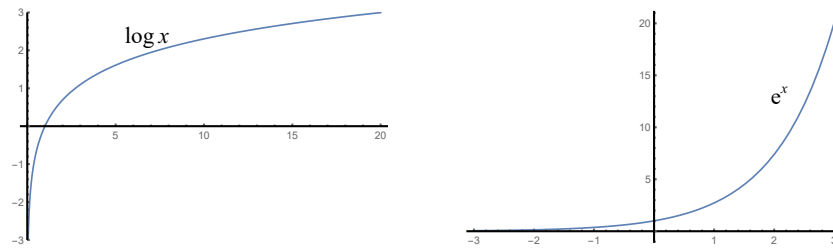
La **exponencial** es  $a^x$  (con  $a > 0$ ), tiene por dominio todo  $\mathbb{R}$  y por imagen  $(0, \infty)$ , mientras que el **logaritmo en base  $a$** ,  $\log_a(x)$ , es la función que deshace la exponencial, y por tanto tiene por dominio  $(0, \infty)$  y por imagen  $\mathbb{R}$ . Tenemos:

$$\log_a(x) = b \iff a^b = x.$$

Cuando la base del logaritmo es  $e$  lo llamamos **logaritmo neperiano** y escribimos  $\ln x$  o simplemente  $\log(x)$ , y solo cuando la base no es  $e$  se escribirá explícitamente. En matemáticas el logaritmo por defecto es el logaritmo neperiano, aunque en las aplicaciones se pueden usar otras bases (por ejemplo en acústica se usan los decibelios, en base 2, así como en sismología la escala Richter también usa la base 2; en química la acidez se expresa en base 10). La exponencial  $e^x$  suele denotarse también como  $\exp(x)$ . Igual que ocurre con los radianes en trigonometría, el uso de la base el número  $e$  servirá para simplificar expresiones útiles. Aunque no necesitamos conocer su valor, es  $e \sim 2.718182$ .

#### PROPIEDADES DEL LOGARITMO:

Para  $a, x, y > 0$  y  $c \in \mathbb{R}$ :



**Figura 1.4:** Funciones logaritmo y exponencial.

1.  $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$ .
2.  $\log(1) = 0$ .
3.  $\log(e) = 1$ .
4.  $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$ .
5.  $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$ .
6.  $\log(x^c) = c \log(x)$ .

**PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL:**

Para  $a > 0$  y  $b, c \in \mathbb{R}$  se tiene:

1.  $a^b = e^{b \log(a)}$ .
2.  $e^0 = 1$ .
3.  $e^1 = e$ .
4.  $e^b e^c = e^{b+c}$ .
5.  $\frac{e^b}{e^c} = e^{b-c}$ .
6.  $(e^b)^c = e^{bc}$ .

### 1.1.8 Operaciones con funciones

1. **Composición:** dadas dos funciones  $f, g$  se define su composición  $h$ :

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C,$$

$$h = g \circ f : A \rightarrow C,$$

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)).$$

En general  $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) \in \text{Dom}(g)\}$ .

2. **Función inversa:** Dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  son inversas si la composición es la función identidad,  $Id$ .

$$\begin{aligned} g \circ f &= Id : A \rightarrow A, & f \circ g &= Id : B \rightarrow B, \\ g \circ f(x) &= x \quad \forall x \in A, & f \circ g(x) &= x \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Se escribe  $g = f^{-1}$  y  $f = g^{-1}$ . Existe la función inversa de  $f : A \rightarrow B$  si  $f$  es biyectiva.

**Ejemplo 5.** Algunas funciones con sus inversas:

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) = 2x + 3, & f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}, \\ f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), & f(x) = x^2, & f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \\ f : [-\infty, 0) \rightarrow [0, \infty), & f(x) = x^2, & f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \\ f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1], & f(x) = \text{sen}(x), & f^{-1}(x) = \text{arc sen}(x), \\ f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], & f(x) = \text{cos}(x), & f^{-1}(x) = \text{arc cos}(x), \\ f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), & f(x) = e^x, & f^{-1}(x) = \log(x). \end{array}$$

## 1.2 Límites

### 1.2.1 Definición de límite y propiedades

Recordemos la función **valor absoluto** de  $x$ , que denotamos por  $|x|$  y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

y que la distancia entre dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}$  es

$$\text{dist}(a, b) = |a - b| = |b - a|.$$

Decimos que el **límite** cuando  $x$  tiende a  $x_0$  de  $f(x)$  es  $l$ , y escribimos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  cuando  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

Es decir, si  $f$  está cerca de  $l$  siempre que  $x$  esté cerca de  $x_0$ .

**Ejemplo 6.**  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$  pues  $|3x - 7 - 5| = 3|x - 4| < 3\delta$ ; basta elegir  $\delta = \varepsilon/3$ .

Si existe el límite es único. Es decir, si  $l$  y  $m$  verifican la definición, entonces  $l = m$ .

**PROPIEDADES:**

Si existen  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ , entonces:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = cl$ , si  $c \in \mathbb{R}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = lm$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ , si  $m \neq 0$ .

**Ejemplo 7.** Límites de funciones elementales:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \quad \text{si } x_0 > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x_0).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log(x) = \log x_0, \quad \text{si } x_0 > 0.$$

**Límite de la composición:**

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow l} h(x) = m$  entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = m$ .

**Ejemplo 8.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}, \quad \text{si } l > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = l^m, \quad \text{si el resultado es distinto de } 0^0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log(f(x)) = \log(l), \quad \text{si } l > 0.$$

### 1.2.2 Límites laterales

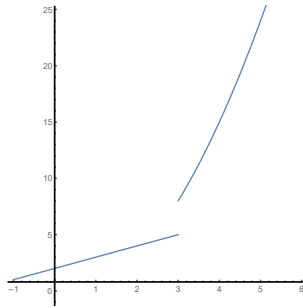
Decimos que el **límite** de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  **por la derecha** es  $l$ , y escribimos  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  cuando  $x_0 < x < x_0 + \delta$ .

Es decir, si  $f$  está cerca de  $l$  siempre que  $x$  esté cerca de  $x_0$ , pero es mayor que  $x_0$ .

Análogamente se define el **límite por la izquierda**,  $x \rightarrow x_0^-$ .

Se tiene que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si y solo si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ .

**Ejemplo 9.** Si  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 3, \end{cases}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 8$  y no existe  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .



**Figura 1.5:** Gráfica del Ejemplo 9.

### 1.2.3 Límites infinitos y en el infinito

1. Decimos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  si para todo número real  $M$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > M$  cuando  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Es decir, si  $f$  es grande siempre que  $x$  esté cerca de  $x_0$ .

**Ejemplo 10.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{(x - 3)^2} = \infty$ .

2. Análogamente se define el límite  $-\infty$ .
3. Decimos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número real  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  cuando  $x > N$ . Es decir, si  $f$  está cerca de  $l$  siempre que  $x$  sea grande.

**Ejemplo 11.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ .

4. Análogamente se define para  $x \rightarrow -\infty$ .
5. Decimos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  si para todo número real  $M$  existe un número real  $N$  tal que  $f(x) > M$  cuando  $x > N$ . Es decir, si  $f$  es grande siempre que  $x$  sea grande.

**Ejemplo 12.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$ .

6. Análogamente se define límite  $-\infty$  o para  $x \rightarrow -\infty$ .

### 1.2.4 Operaciones con infinitos

Las propiedades sobre límites (de la suma, producto, etc...) dadas al principio también son válidas cuando alguno o ambos de los límites  $l$  y  $m$  son infinitos, siempre que las expresiones que aparecen con los límites estén definidas o tengan sentido. Dichas expresiones se entienden en el siguiente sentido:

“ $a^\infty = \infty$  para  $a > 1$  quiere decir:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ”.

Operaciones:

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty, & a - \infty &= -\infty, \\ \infty + \infty &= \infty, & -\infty - \infty &= -\infty, \\ \infty \cdot \infty &= \infty, & -\infty \cdot \infty &= -\infty, \\ \frac{a}{\infty} &= 0, & a \cdot \infty &= \infty, \text{ si } a > 0, \\ \frac{a}{0} &= \pm\infty, \text{ si } a \neq 0, \\ \infty^a &= \infty, \text{ si } a > 0, & \infty^a &= 0, \text{ si } a < 0, \\ \infty^\infty &= \infty, & \infty^{-\infty} &= 0, \\ a^\infty &= \infty, \text{ si } a > 1, & a^\infty &= 0, \text{ si } 0 \leq a < 1. \end{aligned}$$

Las expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso, se llaman **indeterminaciones**. Las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad 1^{-\infty}.$$

En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes.

**Ejemplo 13.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = 6.$$

**Ejemplo 14.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{2x^3 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3/x - 2/x^3}{2 - 3/x^2 + 7/x^3} = \frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 15.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 1/x^2} + 1} = \frac{3}{2}.$$

**Otros límites útiles:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

### 1.2.5 Límites relacionados con la exponencial

Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$  es  $\infty$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - 1)g(x)},$$

si existe el límite, donde  $\alpha$  puede ser  $x_0$ ,  $x_0^+$ ,  $x_0^-$ ,  $\infty$  ó  $-\infty$ .

**Ejemplo 16.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 7} \right)^{x+5} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+5) \frac{10}{2x-7}} = e^5.$

## 1.3 Continuidad

### 1.3.1 Definición

Una función  $f$  es **continua** en un punto  $x_0$  si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Es decir, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  cuando  $|x - x_0| < \delta$ .

Definición alternativa:  $f$  es continua en  $x_0$  si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0.$$

Una función  $f$  es **continua en un intervalo abierto**  $(a, b)$  si es continua en todos los puntos; se escribe  $f \in \mathcal{C}(a, b)$ .

Decimos que  $f$  es **continua en un intervalo cerrado**  $[a, b]$  si es continua en  $(a, b)$ , existen los límites laterales interiores en  $a$  y en  $b$ , y coinciden con los valores de  $f$  en esos puntos, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$



**Ejemplo 17.** Son continuas las funciones: polinomios, seno y coseno, raíz cuadrada (en  $\{x \geq 0\}$ ), exponencial, logaritmo (en  $\{x > 0\}$ ).

### 1.3.2 Propiedades

En los siguientes teoremas están las principales propiedades de las funciones continuas:

**TEOREMA 1.1.** 1. La suma de funciones continuas es continua. También lo es el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).  
2. La composición de funciones continuas es continua, es decir: si  $f$  es continua en  $x_0$  y  $g$  es continua en  $f(x_0)$ , entonces  $g \circ f$  es continua en  $x_0$ .

**Ejemplo 18.** Las funciones siguientes son continuas:

$$\frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad e^{x^2+1}, \quad \text{sen}(x^5 - 3), \quad \cos(e^{4x+5}).$$

**TEOREMA 1.2.** Teorema de Bolzano:

Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  con  $f(a)$  y  $f(b)$  de distinto signo, entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Esto nos sirve para localizar dónde hay raíces en una función. Como consecuencia además tenemos:

**TEOREMA 1.3.** 1. Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .  
2. Si  $f$  es continua en un intervalo  $[a, b]$  entonces alcanza su máximo y su mínimo en ese intervalo.

## 1.4 Cálculo diferencial

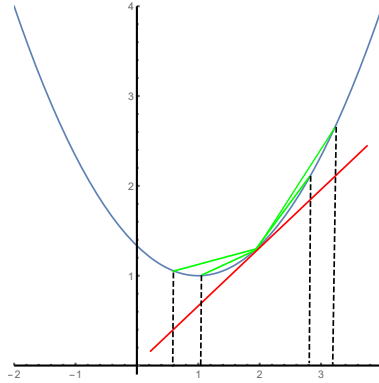
### 1.4.1 Concepto de derivada

En física se define la **velocidad media** en un intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + h]$ , siendo  $u(t)$  la posición, como:

$$v_m = \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

En la gráfica de una función, la **pendiente** del segmento que une dos puntos de la gráfica  $y = f(x)$  de abscisas  $x_0$  y  $x_0 + h$  es:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



**Figura 1.6:** Rectas secantes a una gráfica aproximando la recta tangente.

Si en estos dos contextos pensamos qué ocurre en el límite obtenemos la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente, respectivamente. Este es el concepto que tratamos ahora.

La **derivada** de una función  $f$  en un punto  $x_0$  se define como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Ejemplo 19.** Si  $f(x) = x^2$ , la derivada en  $x = 3$  es

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = 6.$$

Una alternativa de notación para la derivada es:  $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ .

**TEOREMA 1.4.** Si  $f$  es derivable en  $x_0$  entonces es continua en  $x_0$ .

Por tanto, si  $f$  no es continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

La derivada nos permite calcular la **recta tangente** a la gráfica de la función  $y = f(x)$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ , la recta es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

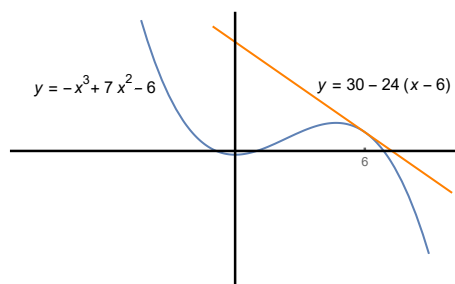


Figura 1.7: Recta tangente.

### 1.4.2 Cálculo de derivadas

Las primeras derivadas se reúnen en la tabla siguiente:

#### DERIVADAS ELEMENTALES

|                                       |                    |                                                                 |
|---------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $f(x) = c,$                           | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = 0,$                                                    |
| $f(x) = x,$                           | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = 1,$                                                    |
| $f(x) = x^p \quad (p \in \mathbb{R})$ | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = px^{p-1},$                                             |
| $f(x) = \text{sen}(x)$                | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = \cos(x),$                                              |
| $f(x) = \cos(x)$                      | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = -\text{sen}(x),$                                       |
| $f(x) = \text{tg}(x)$                 | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = 1 + \text{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x),$ |
| $f(x) = e^x$                          | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = e^x,$                                                  |
| $f(x) = \log x$                       | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = \frac{1}{x},$                                          |
| $f(x) = \text{arc tg}(x)$             | $\rightsquigarrow$ | $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$                                      |

Además, tenemos las siguientes propiedades para derivar funciones más complicadas:

#### PROPIEDADES

1. La derivada es una operación **lineal**:

$$(cf)' = cf', \quad (f + g)' = f' + g'.$$

2. Derivada de un **producto**:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. Derivada de un **cociente**:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Ejemplo 20.** Si  $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ ,

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$$

4. **Regla de la cadena:** Derivada de la composición:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

**Ejemplo 21.** Si  $f(x) = \operatorname{sen}(\log(x))$ ,

$$f'(x) = \cos(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

5. Derivada de la **función inversa**:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}.$$

**Ejemplo 22.** Si  $f(x) = \log(x)$ , como  $f = g^{-1}$ , donde  $g(x) = e^x$ , y  $g'(x) = e^x$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Como vemos, las derivadas de logaritmo y exponencial son sencillas precisamente cuando se usa la base el número  $e$ . Para otra base, por ejemplo

$$f(x) = \log_a(x) \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{x \log(a)}.$$

### 1.4.3 Regla de L'Hôpital

También es útil la derivada para calcular algunos límites de cocientes de funciones que son indeterminaciones:

**TEOREMA 1.5.** *Regla de L'Hôpital*

Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista.

La regla de L'Hôpital se aplica también si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$ , y también si  $\alpha = \infty$ .

**Ejemplo 23.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

### 1.4.4 Máximos y mínimos

Una de las mayores utilidades de la derivada es localizar **extremos** de funciones, es decir, máximos y mínimos. Para ello empezamos con el teorema siguiente:

**TEOREMA 1.6.** Si  $x_0$  es un máximo o un mínimo local de  $f$  y  $f$  es derivable en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ .

Los puntos con derivada cero se conocen como **puntos críticos**. La derivada también nos da otras propiedades geométricas:

**TEOREMA 1.7.** Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es (estrictamente) creciente en  $(a, b)$ , es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall a < x < y < b.$$

Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$  y tiene signo distinto en los extremos del intervalo, en este caso:  $f'(a) < 0 < f'(b)$ , entonces la ecuación  $f'(x) = 0$  tiene una y solo una solución en ese intervalo. Lo mismo ocurre si el signo de la derivada es negativo.

Los extremos, es decir, los **máximos y mínimos** de una función en un intervalo están entre los puntos siguientes:

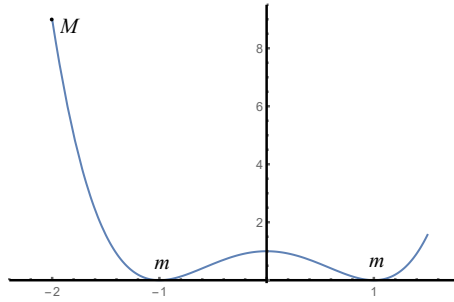
1. Puntos donde la derivada es nula.
2. Puntos donde no existe la derivada.
3. Los extremos del intervalo.

Comparando el valor de la función en esos puntos encontramos el máximo y el mínimo si los hay.

**Ejemplo 24.** Si  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  en  $x \in [-2, 3/2]$  entonces  $f'(x) = 4x^3 - 4x$ , que se anula en  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ . Comparando los valores:

$$f(-2) = 9, \quad f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(3/2) = 25/16,$$

el máximo absoluto  $M$  de  $f$  en ese intervalo está en  $x = -2$  y los mínimos absolutos  $m$  en  $x = \pm 1$ .



**Figura 1.8:** Gráfica de la función del ejemplo 24 y sus extremos.

## 1.5 Gráficas de funciones

Para la representación gráfica estudiaremos:

1. Dominio, simetrías, periodicidad y asíntotas.
2. Crecimiento, decrecimiento y extremos.
3. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

### 1.5.1 Dominio, simetrías, periodicidad y asíntotas

Averiguamos el dominio, si la función es par o impar, o ninguna de las dos cosas, si es periódica y estudiamos el comportamiento de  $f$  en los extremos del dominio, calculando límites. En particular, estudiamos si tiene o no lo que llamamos asíntotas.

Decimos que  $f$  tiene una **asíntota horizontal** cuando  $x \rightarrow \infty$  si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l,$$

con  $l \in \mathbb{R}$ ; la asíntota es la recta  $y = l$ . Si el límite es cuando  $x \rightarrow -\infty$  la asíntota horizontal es para  $x \rightarrow -\infty$ .

Decimos que  $f$  tiene una **asíntota oblicua** cuando  $x \rightarrow \infty$  si los límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

son finitos, con  $a \neq 0$ . En ese caso la asíntota es  $y = ax + b$ . De forma similar se define para  $x \rightarrow -\infty$ .

Si para  $x \rightarrow \infty$  existe una asíntota horizontal entonces no hay asíntota oblicua y viceversa. Lo mismo ocurre para  $x \rightarrow -\infty$ . Pero una función puede tener asíntotas distintas, o de distinto tipo, para  $x \rightarrow \infty$  y para  $x \rightarrow -\infty$ .

Decimos que  $f$  tiene una **asíntota vertical** en  $x = x_0$  si alguno de los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

es  $\infty$  ó  $-\infty$ . La asíntota es la recta  $x = x_0$ .

Estas asíntotas pueden estar en los extremos del dominio de la función si estos son finitos y nunca en los puntos donde la función es continua. Suelen aparecer con los cocientes en los puntos que anulan el denominador.

Además, la gráfica de una función nunca puede cruzar una asíntota vertical, pero sí puede cruzar una asíntota horizontal u oblicua.

**Ejemplo 25.**  $y = \frac{2x}{x^2 - x - 6}$  tiene dos asíntotas verticales,  $x = -2$ ,  $x = 3$ .

Las asíntotas horizontales suelen aparecer con cocientes de polinomios donde el grado del numerador es menor o igual que el del denominador, así como con exponenciales.

**Ejemplo 26.**  $y = \frac{2x^2}{3x^2 + 10}$  tiene la asíntota horizontal  $y = 2/3$  tanto para  $x \rightarrow \infty$  como para  $x \rightarrow -\infty$ .

**Ejemplo 27.**  $y = e^x$  tiene la asíntota horizontal  $y = 0$  para  $x \rightarrow -\infty$ .

Las asíntotas oblicuas suelen aparecer con cocientes de polinomios donde el grado del numerador es uno más que el del denominador.

**Ejemplo 28.**  $y = \frac{x^3 - 7x^2 + 2}{7x^2 + 10}$  tiene la asíntota oblicua  $y = \frac{x-7}{7}$  tanto para  $x \rightarrow \infty$  como para  $x \rightarrow -\infty$ .

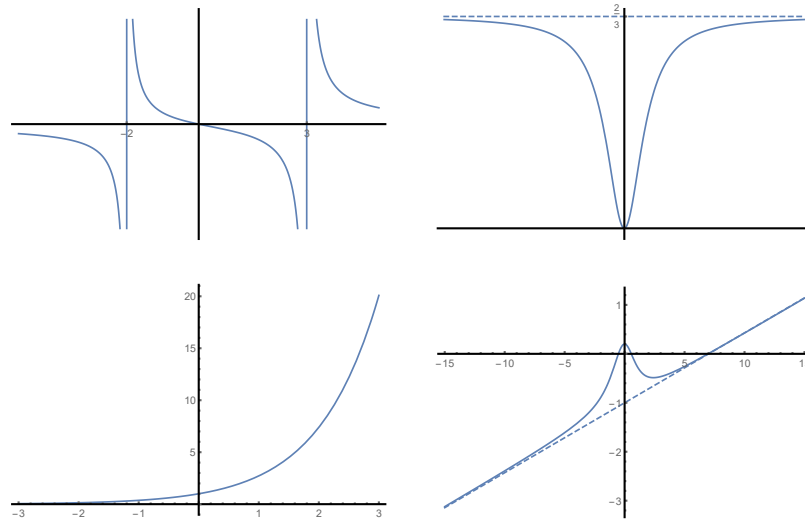
## 1.5.2 Crecimiento, decrecimiento y extremos

Las derivadas nos sirven para estudiar crecimiento y decrecimiento:

**TEOREMA 1.8.** 1. Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es (estrictamente) creciente en  $(a, b)$ .

2. Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es (estrictamente) decreciente en  $(a, b)$ .

3. Si  $f$  es creciente en  $(x_0 - \delta, x_0)$  para algún  $\delta > 0$  y decreciente en  $(x_0, x_0 + \delta)$ , entonces  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$ . Es decir, si es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un máximo local. Si es al revés tiene un mínimo local.



**Figura 1.9:** Asíntotas de los ejemplos 25 a 28.

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función y sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

**Ejemplo 29.**  $f(x) = 4x^3 - 3x$  verifica  $f'(x) = 12x^2 - 3$ , que se anula en  $x = \pm \frac{1}{2}$ . Se tiene

$$\begin{array}{lll}
 x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) & \rightsquigarrow & f'(x) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ creciente} \\
 x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \rightsquigarrow & f'(x) < 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ decreciente} \\
 x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) & \rightsquigarrow & f'(x) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ creciente}
 \end{array}$$

Por tanto,  $x = -\frac{1}{2}$  es máximo local y  $x = \frac{1}{2}$  es mínimo local.

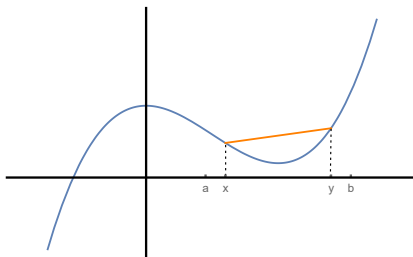
### 1.5.3 Convexidad, concavidad y puntos de inflexión

Hay dos clases de curvatura de una función: Decimos que una función es **convexa** en un intervalo  $[a, b]$  si el conjunto que queda por encima de su gráfica es convexo visto desde abajo, es decir, si dados dos puntos cualesquiera  $x, y \in [a, b]$ , el segmento que une los puntos en la gráfica  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  está por encima de la gráfica (o sobre ella). Decimos que es **cóncava** si  $-f$  es convexa.

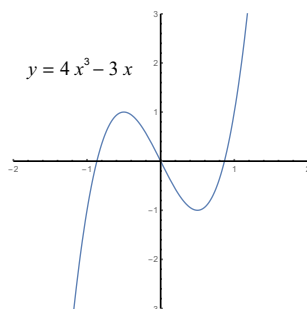
Observamos que una recta es a la vez convexa y cóncava, pero como no está curvada no hay confusión ninguna.



En algunos libros de texto los nombres de convexa y cóncava se utilizan al revés. En caso de duda conviene hacer el dibujo de a qué nos referimos con cóncavo y convexo.



**Figura 1.10:** Gráfica de una función convexa en el intervalo  $[a, b]$ .



**Figura 1.11:** Gráfica de la función de los ejemplos 29 y 30.

La segunda derivada viene en nuestra ayuda:

**TEOREMA 1.9.** Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es convexa en  $(a, b)$ . Si  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava en  $(a, b)$ .

Se dice que  $x_0$  es un **punto de inflexión** de una función  $f$  si la curvatura es distinta a cada lado del punto.

**TEOREMA 1.10.** Si  $x_0$  es un punto de inflexión de  $f$  y existe la segunda derivada allí, entonces  $f''(x_0) = 0$ .

Para determinar los intervalos de convexidad y concavidad de una función y sus puntos de inflexión hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

**Ejemplo 30.**  $f(x) = 4x^3 - 3x$  verifica  $f''(x) = 24x$ , que se anula en  $x = 0$ . Se tiene

$$\begin{array}{lll} x \in (-\infty, 0) & \rightsquigarrow & f''(x) < 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ cóncava} \\ x \in (0, \infty) & \rightsquigarrow & f''(x) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ convexa} \end{array}$$

Por tanto  $x = 0$  es un punto de inflexión.

En ocasiones la segunda derivada es muy complicada de manejar. En la mayoría de los casos podremos obtener una gráfica de  $f$  bastante precisa aún sin utilizar  $f''$ .

Para completar la gráfica podemos calcular el valor de  $f$  en los puntos críticos, en los puntos donde no exista la derivada, en los extremos del dominio (si es que  $f$  está definida allí) y en los puntos de inflexión. También conviene obtener los cortes de la gráfica con los ejes, siempre que sea posible calcularlos y estudiar los signos de  $f$  en los distintos conjuntos.

---

–  $\mathcal{A}_\delta\mathcal{P}$ –

–  $\mathcal{ERC}$ –

