



Universidad **Carlos III** de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Apuntes

**Curso preparatorio para el acceso a la universidad
para mayores de 25 años**

Tema 2

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



2

CÁLCULO INTEGRAL

En este tema estudiamos el concepto de integral como primitiva y su aplicación al cálculo de áreas.

Contenido

2.1. Cálculo de primitivas	28
2.1.1. Definiciones y propiedades básicas	28
2.1.2. Integrales inmediatas	29
2.2. Técnicas de integración	30
2.2.1. Método de descomposición en fracciones simples	30
2.2.2. Cambio de variable o método de sustitución	33
2.2.3. Integración por partes	34
2.2.4. Integrales trigonométricas	35
2.2.5. Cambios de variable frecuentes	36
2.3. Integrales definidas	37
2.3.1. Definición y propiedades	37
2.3.2. Regla de Barrow	38
2.3.3. Teorema Fundamental del Cálculo	39
2.3.4. Cálculo de áreas	40

2.1 Cálculo de primitivas

2.1.1 Definiciones y propiedades básicas

Geométricamente, el problema de la derivación surge al buscar la pendiente de una curva y el problema de la integración aparece cuando se pre-

tende calcular el área bajo una curva. Newton encontró, en el S.XVIII, que estos dos problemas están relacionados y que de hecho son inversos.

Se dice que una función g es una **primitiva** o **integral indefinida** de f si $g' = f$, y escribimos:

$$\int f(x) dx = g(x), \quad \text{o también} \quad \int f = g.$$

(se lee: La integral de $f(x)$ diferencial de x es igual a $g(x)$). La función f se denomina **integrando**.

En realidad, hay infinitas primitivas de f , porque si c es una constante cualquiera la función $g + c$ también es una primitiva de f . Habitualmente se escribe:

$$\int f(x) dx = g(x) + c.$$

La constante c se llama **constante de integración**.

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$, es decir, se puede calcular la integral de f en ese intervalo.

TEOREMA 2.1. *La integración es una operación lineal, es decir:*

1. $\int kf = k \int f, \quad \text{si } k \text{ es una constante,}$
2. $\int (f + g) = \int f + \int g.$

Sin embargo no hay fórmulas análogas para la integral de un producto o de un cociente.

2.1.2 Integrales inmediatas

Partiendo de la tabla de derivadas elementales tenemos una primera lista de primitivas:

1. $\int 1 \, dx = x + c,$
2. $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c,$
3. $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \log |x| + c,$
5. $\int e^x \, dx = e^x + c,$
6. $\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + c,$
7. $\int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + c,$
8. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \int \sec^2(x) \, dx = \operatorname{tg}(x) + c,$
9. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg}(x) + c.$

Observemos que la integral de $\frac{1}{x}$ no es $\log x$, sino $\log |x|$. Ahora ya podemos integrar muchas funciones:

Ejemplo 31.

$$\int (2x + 3) \, dx = x^2 + 3x + c.$$

Ejemplo 32.

$$\int \left(x^3 - 5x^4 + \frac{5}{x} \right) \, dx = \frac{x^4}{4} - x^5 + 5 \log |x| + c.$$

Ejemplo 33.

$$\int (2 \operatorname{sen}(x) - \cos(x) + 3e^x) \, dx = -2 \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + 3e^x + c.$$

Ejemplo 34.

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2(x)} + \frac{2}{1+x^2} \right) \, dx = 3 \operatorname{tg}(x) + 2 \operatorname{arc\,tg}(x) + c.$$

2.2 Técnicas de integración

2.2.1 Método de descomposición en fracciones simples

Este método se aplica para integrar cocientes de polinomios:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{con } P, Q \text{ polinomios,}$$

Es en cierta medida el inverso de la suma de fracciones.

Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q , dividimos para obtener grado menor en el numerador que en el denominador:

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

La integral del cociente que queda puede que sea directa, como en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 35.

$$\int \frac{3}{x-5} dx = 3 \log |x-5| + c.$$

Ejemplo 36. Las otras potencias se integran directamente también:

$$\int \frac{7}{(x+2)^3} dx = \frac{-7}{2(x+2)^2} + c.$$

Ejemplo 37. Cuando en el numerador está la derivada del denominador:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \log |x^2+x| + c.$$

Ejemplo 38. En este caso no es exactamente la derivada:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+1} dx = 2 \log(x^2+1) + 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x) + c.$$

Si no es tan directo, escribimos el integrando como suma de fracciones más sencillas que se integran como los ejemplos anteriores (casi siempre). Vemos algunos casos:

TIPOS DE DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo 39. Para integrar $\int \frac{-x-2}{x(x-1)} dx$ descomponemos:

$$\frac{-x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1},$$

para ciertos valores $A, B \in \mathbb{R}$, igualando los numeradores obtenemos:

$$-x-2 = A(x-1) + Bx,$$

sustituyendo los valores de las raíces del denominador, $x=0$, $x=1$, obtenemos:

$$\begin{cases} -2 = -A \\ -3 = B \end{cases} \implies A = 2, \quad B = -3.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{-x-2}{x(x-1)} dx &= \int \frac{2dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x-1} \\ &= 2 \log |x| - 3 \log |x-1| + c.\end{aligned}$$

Ejemplo 40. Para resolver: $\int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx$ escribimos:

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

para ciertos valores $A, B, C \in \mathbb{R}$ que calculamos sumando las fracciones e igualando los numeradores de cada lado. Sustituyendo tres valores de x obtenemos tres ecuaciones con las que calcular A, B, C . Elegimos valores sencillos; usamos las raíces del denominador: $x = 1$, en este caso, y otros dos valores, por ejemplo, $x = 0$ y $x = 2$.

La única solución es $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int (x-1)^{-2} dx + 3 \int (x-1)^{-3} dx \\ &= 2 \log |x-1| + (x-1)^{-1} - \frac{3}{2} (x-1)^{-2} + c.\end{aligned}$$

En general, un polinomio de segundo grado en el denominador sin raíces se trata completando en el numerador su derivada (si el numerador es de grado 1) y si queda una constante en el numerador se completan cuadrados en el denominador

Ejemplo 41.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

porque:

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Ejemplo 42. Para calcular $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2+1)} dx$ escribimos:

$$\frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

para ciertos valores $A, B, C \in \mathbb{R}$. Hemos escrito $(Bx+C)/(x^2+1)$ porque el grado del numerador debe ser menor que el del denominador, como el grado

de $x^2 + 1$ es dos, debemos poner en el numerador un polinomio de grado uno. Calculamos ahora las constantes: $A = 3$, $B = 2$ y $C = -1$, por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx &= 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 3 \log |x| + \log(x^2 + 1) - \arctg(x) + c.\end{aligned}$$

El número total de incógnitas en la descomposición en fracciones simples es siempre igual al grado del denominador. La cantidad de valores de x que hay que sustituir es igual a la de incógnitas.

No hemos estudiado cómo descomponer en fracciones simples los cocientes como $\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$, que requieren más trabajo.

2.2.2 Cambio de variable o método de sustitución

La fórmula del cambio de variable es la versión integral de la regla de la cadena, es como sigue:

TEOREMA 2.2. Si f y g son funciones y g es derivable, entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Para aplicarla, en la integral identificamos alguna expresión que nos interese simplificar y esa será la nueva variable $t = F(x)$, después hay que despejar x como función de t para hallar dx u obtenerlo directamente.

Con un cambio de variable se transforma la integral en otra que depende de una variable que no es la original, por lo que **hay que deshacer el cambio** tras haber resuelto la integral.

Ejemplo 43. En la integral siguiente:

$$\int (2x + 3)^3 dx$$

definimos el cambio $t = 2x + 3$, con lo que $x = \frac{t - 3}{2}$ y $dx = \frac{dt}{2}$ y obtenemos:

$$\int (2x + 3)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{t^4}{8} + c = \frac{(2x + 3)^4}{8} + c.$$

Ejemplo 44. En la siguiente integral hacemos el cambio $t = \sin(x)$, y observamos que $\cos(x)dx = dt$, luego

$$\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin(t)} + c.$$

Ejemplo 45. Utilizamos ahora $t = e^{3x} + 5$, con lo que $dt = 3e^{3x}dx$:

$$\int \frac{2e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \int \frac{2}{3} \frac{dt}{t} = \frac{2}{3} \log |t| + c = \frac{2}{3} \log |e^{3x} + 5| + c.$$

Más adelante veremos otros ejemplos de cambios de variable.

2.2.3 Integración por partes

La fórmula de integración por partes es la versión integral de la regla de la derivada de un producto.

TEOREMA 2.3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Si $u(x)$ es una función derivable llamamos **diferencial** de u a $du = u'(x) dx$.

Usando la notación de las diferenciales, con $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la regla de integración por partes se escribe de la siguiente manera, que resulta más fácil de recordar:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Hay unos cuantos casos en que es especialmente apropiada pues transforma la integral en otra más simple:

1. Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes en las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int p(x) e^{ax+b} dx, & \qquad \int p(x) (ax+b)^\alpha dx, \\ \int p(x) \sin(ax+b) dx, & \qquad \int p(x) \cos(ax+b) dx, \end{aligned}$$

haciendo $u = p(x)$, al integrar por partes tantas veces como el grado de $p(x)$, llegaremos a una integral elemental.

2. En las integrales

$$\int p(x) \log(ax+b) dx,$$

haciendo $dv = p(x) dx$, porque la derivada del logaritmo es mucho más fácil de manejar.

Ejemplo 46. En la siguiente integral $u = x$, $dv = \operatorname{sen}(x) dx$, luego $du = dx$, $v = -\cos(x)$ y:

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c.$$

Ejemplo 47. Para integrar: $\int \log(x) dx$, tomaremos $u = \log(x)$, $dv = dx$, luego $du = \frac{dx}{x}$ y $v = x$ y queda:

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - \int x \frac{dx}{x} = x \log(x) - x + c.$$

2.2.4 Integrales trigonométricas

Podemos integrar fácilmente los siguientes tipos:

1. Las integrales **inmediatas**:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(x) dx &= -\cos(x) + c, & \int \cos(x) dx &= \operatorname{sen}(x) + c, \\ \int \operatorname{tg}(x) dx &= -\log |\cos(x)| + c, & \int \sec^2(x) dx &= \operatorname{tg}(x) + c. \end{aligned}$$

2. Para **potencias impares de seno y coseno**:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2n+1}(x) dx &= \int \operatorname{sen}^{2n}(x) \operatorname{sen}(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^n \operatorname{sen}(x) dx. \\ \int \cos^{2n+1}(x) dx &= \int \cos^{2n}(x) \cos(x) dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2(x))^n \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 48.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5(x) dx &= \int (1 - \cos^2(x))^2 \operatorname{sen}(x) dx = - \int (1 - t^2)^2 dt \\ &= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 - t + c \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c. \end{aligned}$$

3. Para **potencias pares de seno y coseno** utilizamos el coseno del ángulo doble y la relación básica entre seno y coseno:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x), \\ 1 &= \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x), \end{aligned}$$

y obtenemos:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Ejemplo 49.

$$\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c.$$

2.2.5 Cambios de variable frecuentes

Conviene recordar algunos muy prácticos:

1. Si aparece e^x y no es inmediata la integral, se puede hacer el cambio $t = e^x$, ya que entonces $x = \log(t)$ y $dx = dt/t$.

Ejemplo 50.

$$\int \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int \frac{t + 2}{(t + 1)^2} \frac{dt}{t}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{t + 2}{(t + 1)^2 t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} + \frac{C}{(t + 1)^2} \implies A = 2, B = -2, C = -1.$$

Integramos y deshacemos el cambio:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{t} + \frac{-2}{t + 1} - \frac{1}{(t + 1)^2} \right) dt &= 2 \log |t| - 2 \log |t + 1| + \frac{1}{t + 1} + c \\ &= 2x - 2 \log(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} + c. \end{aligned}$$

2. Si aparecen varias raíces de la misma expresión, por ejemplo, $\sqrt{1+x}$, $\sqrt[3]{1+x}$, $\sqrt[4]{1+x}$, se cambia $1+x = t^{12}$ para que todas las raíces se transformen en potencias enteras positivas.

Ejemplo 51. En esta integral cambiamos $x+1 = t^6$, $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{t^3}{t^2 + t^3} 6t^5 dt = \int \frac{t^6}{1+t} dt \\ &= \int (t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{1+t}) dx \\ &= \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \log |1+t| + c = \\ &= \frac{x+1}{6} - \frac{(x+1)^{5/6}}{5} + \frac{(x+1)^{2/3}}{4} - \frac{(x+1)^{1/2}}{3} + \frac{(x+1)^{1/3}}{2} \\ &\quad - (x+1)^{1/6} + \log |1 + (x+1)^{1/6}| + c. \end{aligned}$$

3. Si aparece $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $\sin(t) = x$, pues así:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(t) \quad \text{y} \quad dx = \cos(t) dt.$$

Si la expresión es $\sqrt{a-b(x-\alpha)^2}$, la transformamos en la anterior y luego hacemos el cambio.

4. Si aparece $\sqrt{x^2-1}$ hacemos el cambio $\sec(t) = x$, para que:

$$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg}(t) \quad \text{y} \quad dx = \sec(t) \operatorname{tg}(t) dt.$$

Y si es algo relacionado la transformamos primero en la anterior.

5. Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos hacer $\operatorname{tg}(t) = x$ y entonces:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos(t)} \quad \text{y} \quad dx = \frac{dt}{\cos^2(t)}.$$

Ejemplo 52. En la siguiente integral hacemos $x = \sin(t)$, así $dx = \cos(t) dt$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dx \\ &= \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

2.3 Integrales definidas

2.3.1 Definición y propiedades

El área A comprendida entre la gráfica de una función continua positiva f , el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, es la **integral definida** de f en $[a, b]$ y se escribe

$$A = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Los puntos a y b se llaman **extremos de integración**.

La variable de integración (ya sea x , t , etc.) es muda: se puede usar cualquier letra para designarla, o incluso no escribirla, como aparece en la primera notación $\int_a^b f$.

Si f tiene distintos signos, la integral será el área por encima del eje menos el área por debajo del eje.

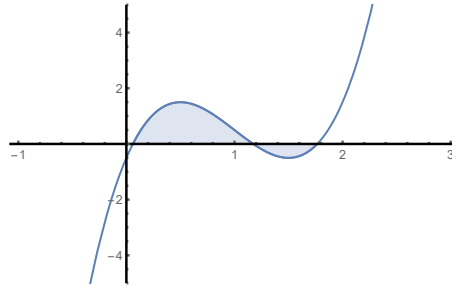


Figura 2.1: Área encerrada por la gráfica de una función y el eje horizontal.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. $\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\int_a^a f = 0$
4. $\int_a^b f = - \int_b^a f$
5. $\int_a^b f g \neq \int_a^b f \int_a^b g$
6. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

2.3.2 Regla de Barrow

La integral definida se relaciona con el cálculo de primitivas de la forma siguiente:

TEOREMA 2.4. *Regla de Barrow*

Si g es una primitiva de f en (a, b) , entonces

$$\int_a^b f = \left[g(x) \right]_a^b = g(b) - g(a).$$

Para aplicar la regla de Barrow es suficiente con obtener una primitiva, no es necesario escribir la constante de integración. Si usamos la constante el resultado será el mismo porque la constante se cancela.

Ejemplo 53.

$$\int_0^\pi (3x^4 + \operatorname{sen}(2x))dx = \left[\frac{3x^5}{5} - \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{3\pi^5}{5} - \frac{1}{2}(1 - 1) = \frac{3\pi^5}{5}.$$

Si la primitiva se obtiene integrando por partes también podemos utilizar:

TEOREMA 2.5. Si f' y g' son funciones continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Ejemplo 54. Integramos por partes haciendo: $u = x$, $dv = e^x dx$:

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 2e - 1.$$

Si hallamos la primitiva integrando mediante cambio de variable podemos utilizar ahora el siguiente teorema y ahorrarnos el deshacer el cambio al final. Eso si, hay que cambiar también los extremos de integración:

TEOREMA 2.6. Si g' es continua en $[a, b]$ y f es integrable en $[g(a), g(b)]$, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt.$$

Ejemplo 55. Hacemos aquí el cambio $x = \operatorname{sen}(t)$, $dx = \cos(t)dt$. El intervalo se transforma en $t \in [0, \pi/2]$, luego:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2.3.3 Teorema Fundamental del Cálculo

Esta subsección completa el estudio anterior, pero habitualmente no se incluye en las pruebas de acceso a la universidad.

TEOREMA 2.7. Si f es continua en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Al hablar de la derivada en a y en b nos estamos refiriendo a derivadas laterales, ya que no sabemos si F está definida a la izquierda de a o a la derecha de b .

La variable de integración t puede ser sustituida por $s, y, \dots$ pero no por x , que es la variable que aparece en uno de los extremos de la integral y que por tanto tiene un significado definido de antemano.

2.3.4 Cálculo de áreas

Tal como hemos definido, el **área bajo la gráfica** de una función continua positiva f entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Si f no es positiva, la parte donde es negativa cuenta con signo negativo, luego el área comprendida entre su gráfica, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas f y g y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Ejemplo 56. El área del recinto acotado entre las gráficas de las funciones $y = x^3 - x$, $y = x$:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx.$$

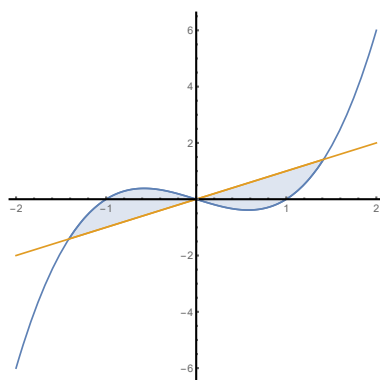


Figura 2.2: Área del ejemplo 56.

– $A_{\delta}P$ –

– $\mathcal{ERC}$ –

