uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Apuntes

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 3

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

BY NC SA

3

ÁLGEBRA LINEAL

Este tema está dedicado al estudio de las matrices y sus propiedades y a su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Contenido

3.1. Sistemas lineales de ecuaciones 43
3.1.1. Métodos de resolución 44
3.1.2. Conjuntos de soluciones 45
3.2. Vectores y matrices 46
3.2.1. Vectores 46
3.2.2. Matrices 48
3.2.3. Determinantes 50
3.3. Resolución matricial de sistemas lineales 52
3.3.1. Teorema de Rouché-Frobenius 53
3.3.2. Método de Gauss 54
3.3.3. Regla de Cramer 56
3.3.4. Sistemas con un parámetro 56

3.1 Sistemas lineales de ecuaciones

Los sistemas lineales de ecuaciones aparecen en multitud de problemas que se plantean en la vida cotidiana, así como en problemas geométricos o problemas teóricos.

***Ejemplo* 57.** Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidesnatada por un total de 9.60€. Si el paquete de leche entera cuesta

1.15€ y el de semidesnatada 0.90€, ¿cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?

Esto se traduce en el sistema:

$$\begin{cases} E + S = 9 \\ 1.15E + 0,9S = 9,6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad E = 6, \quad S = 3.$$

Los sistemas más naturales tienen el mismo número de **ecuaciones** que de **incógnitas**, 2 en nuestro ejemplo.

3.1.1 Métodos de resolución

Tenemos tres métodos:

1. **Método de sustitución**: despejamos una incógnita en una ecuación y sustituimos en las demás.
2. **Método de eliminación de Gauss**: realizando operaciones con las ecuaciones eliminamos incógnitas obteniendo un sistema inmediato de resolver.
3. **Método de Cramer**: utiliza un cociente de determinantes (lo estudiamos más adelante).

***Ejemplo* 58.** Por sustitución:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos $x = 2y + 4$, que en la primera implica $2(2y + 4) + 3y = 1$, es decir, $y = -1$, que da $x = 2$;

***Ejemplo* 59.** Utilizamos ahora el método de Gauss para el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3, \\ y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

Restamos a la tercera fila la primera multiplicada por 2 y luego a la tercera fila le restamos la segunda multiplicada por 7, obtenemos

$$\begin{cases} x - 2y - z &= 3, \\ y + z &= 0, \\ -4z &= -4. \end{cases}$$

Este sistema es triangular y se puede resolver fácilmente desde abajo:

$$z = 1 \;\Rightarrow\; y = -z = -1 \;\Rightarrow\; x = 3 + 2y + z = 2.$$

El método de Gauss es más eficaz utilizando notación matricial, como veremos. El método de Cramer *necesita* notación matricial.

3.1.2 Conjuntos de soluciones

Clasificamos los sistemas según la cantidad de soluciones:

1. Si tiene un solución única decimos que es un **sistema compatible determinado**.
2. Si tiene infinitas soluciones decimos que es un **sistema compatible indeterminado**.
3. Si no tiene solución decimos que es un **sistema incompatible**.

Se tiene entonces la alternativa

$$\text{sistema}\begin{cases}\text{compatible}\begin{cases}\text{determinado } (SCD)\\ \text{indeterminado } (SCI)\end{cases}\\ \text{incompatible } (SI)\end{cases}$$

Los sistemas con dos incógnitas se pueden interpretar como intersección de rectas en el plano.

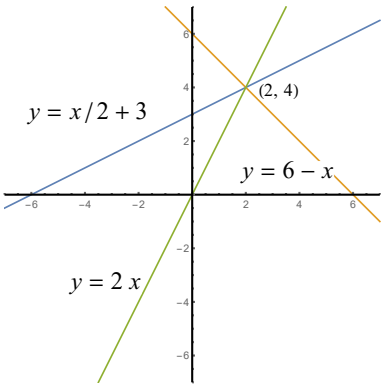

Figura 3.1: Intersección de las tres rectas del ejemplo anterior.

***Ejemplo* 60.** El sistema:

$$\begin{cases}2x - y = 0,\\ x - 2y = -6,\\ x + y = 6,\end{cases}$$

es compatible determinado, un único punto solución.

Los sistemas con tres incógnitas describen las intersecciones de planos en el espacio, como veremos en el siguiente capítulo. La imagen muestra la intersección de dos planos, que es una recta (es decir, corresponde a un sistema compatible indeterminado, infinitos puntos solución).

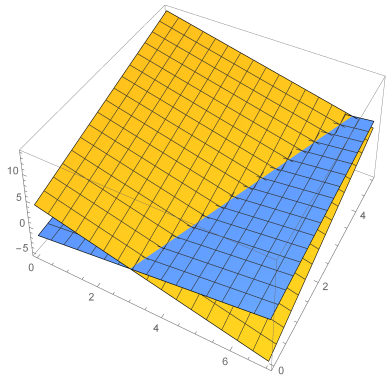

Figura 3.2: Intersección de dos planos a lo largo de una recta.

3.2 Vectores y matrices

3.2.1 Vectores

Un **vector** (de dimensión n) es una fila ordenada de n números: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Cada número es una **componente**, o **coordenada**, del vector. Los vectores son elementos del espacio vectorial de dimensión n, $\mathbb{R}^n$. En los ejemplos consideraremos principalmente $n = 2$ y $n = 3$.

Operaciones

1. La **suma** de dos vectores se hace componente a componente, por tanto solo se pueden sumar vectores con el mismo número de componentes. La suma es un nuevo vector, por ejemplo:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

2. El **producto por un número** se hace multiplicando cada componente por el número. El resultado es un vector, por ejemplo:

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

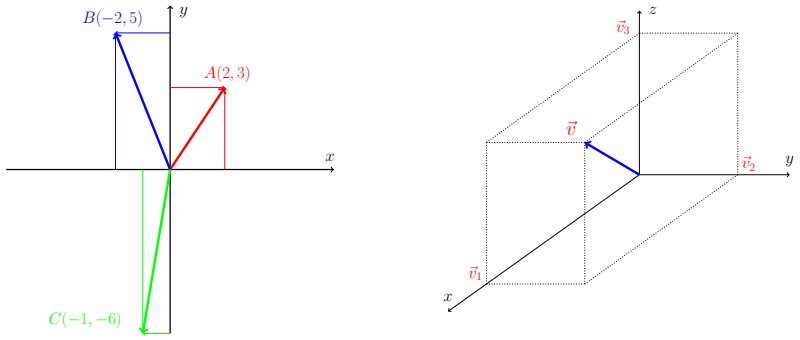

Figura 3.3: Vectores en el plano y en el espacio.

3. El **producto escalar** de dos vectores (de la misma dimensión) se hace componente a componente y sumando; el resultado es un número, es decir:
$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$
Esta operación se estudiará en el capítulo de geometría.

Propiedades

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores y λ, μ son números reales:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. (Conmutativa)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. (Asociativa)
3. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. (Existe elemento neutro)
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$. (Existe elemento opuesto)
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$. (Distributiva 1)
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$. (Distributiva 2)

Una **combinación lineal** de un conjunto de vectores $\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}\}$ es una expresión:
$$\lambda_1\vec{a_1} + \cdots + \lambda_k\vec{a_k},$$
donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. El resultado es otro vector.

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si existe alguna combinación lineal no trivial (es decir no todos los coeficientes son cero)

que da cero. Diremos que es **linealmente independiente** si no existe tal combinación lineal, es decir, toda combinación lineal suya igualada a cero tiene necesariamente todos los coeficientes cero.

Otra forma de verlo: es linealmente dependiente si alguno de los vectores se puede poner como combinación lineal de los otros. Es linealmente independiente si ningún vector es combinación lineal de los demás.

El **rango** de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes que tiene. También es la dimensión del espacio que generan sus combinaciones lineales.

Un conjunto de vectores B es una **base** de un espacio vectorial V si $B \subset V$ y cumple:

1. B es linealmente independiente.
2. Todos los vectores de V son combinación lineal de los vectores de B.

La **base canónica** es la formada por los vectores con todas sus componentes cero salvo una, que es un 1. En $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

3.2.2 Matrices

Una **matriz** de **dimensiones** $m \times n$ es una colección de m vectores de dimensión n colocados uno encima de otro, formando una caja de m **filas** y n **columnas**.

***Ejemplo* 61.** La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene 3 filas y 4 columnas, es por tanto 3×4.

También se puede interpretar como n vectores columna colocados uno a continuación de otro. Las filas y las columnas de una matriz son pues vectores, que llamamos **vectores fila** y **vectores columna** respectivamente.

Una matriz $1 \times n$ es un vector; una matriz 1×1 es un número.

El **rango** de una matriz es el rango del conjunto de sus vectores fila o sus vectores columna, que es el mismo.

La **traspuesta** de una matriz A es la matriz que tiene por filas los vectores columna de A. Se denota A^T. Una matriz y su traspuesta tienen, por tanto, el mismo rango.

Operaciones

1. La **suma** de dos matrices de las mismas dimensiones se hace sumando coeficiente a coeficiente.

   ***Ejemplo* 62.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. El **producto por un número** se hace multiplicando cada coeficiente por el número.

   ***Ejemplo* 63.**

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. El **producto de dos matrices**, $A \cdot B$, solo se puede realizar cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si A es $m \times n$ y B es $n \times k$, entonces el producto es una matriz C de dimensiones $m \times k$. En C, el coeficiente $c_{i,j}$ es la suma del producto de los coeficientes de la fila i de A por los coeficientes de la columna j de B, cada uno por su correspondiente.

   ***Ejemplo* 64.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+12 & 4-15 & -2+0 \\ -1+32 & -2-40 & 1+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -11 & -2 \\ 31 & -42 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   ***Ejemplo* 65.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - 2\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Llamamos **matriz identidad**, I, a la matriz cuadrada que tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto de los coeficientes. En dimensión 3×3 es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus vectores columna (y sus vectores fila) forman la base canónica del espacio de tres dimensiones.

Para una matriz cuadrada, A, la matriz que al multiplicarla por ella nos da la identidad se llama **matriz inversa** de A, y se denota por A^{-1}. Entonces:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I.$$

Cuando existe la matriz inversa de A decimos que A es **invertible**.

3.2.3 Determinantes

Dada una matriz cuadrada A, de dimensiones 2×2, su **determinante**, que se denota por $|A|$, es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Si A es una matriz 3×3, entonces el determinantes es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

donde los determinantes 2×2 que aparecen se llaman **cofactores** de a_{11}, a_{12} y a_{13} respectivamente y se obtienen eliminando de la matriz A la fila y la columna en que está el coeficiente al que corresponden. Este determinante lo hemos desarrollado por la primera fila. Podemos desarrollarlo por cualquier fila o columna, teniendo en cuenta que los signos que hay que asignar a cada coeficiente son alternados, con el esquema siguiente:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Regla de Sarrus: Un determinante 3×3 se puede calcular también, más fácilmente, siguiendo el esquema de hacer los productos de coeficientes

siguiendo las diagonales y con los signos asignados según las direcciones: Sur-Este positivo, Sur-Oeste negativo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{array}$$

Sin embargo el método de desarrollar el determinante por cofactores es más adecuado si hay alguna fila (o columna) con muchos ceros.

Propiedades

1. $|I| = 1$.
2. $|A| = |A^T|$.
3. $|AB| = |A|\,|B|$.
4. Es lineal por filas o por columnas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & tb_1 & c_1 \\ a_2 & tb_2 & c_2 \\ a_3 & tb_3 & c_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_1 & d_2 \\ a_3 & b_1 & d_3 \end{vmatrix}.$$

5. Si dos columnas son iguales, $|A| = 0$.
6. No cambia si a una columna le sumamos un múltiplo de otra.
7. Si se intercambian dos columnas, cambia de signo.
8. Los vectores columna son linealmente independientes si y sólo si el determinante es distinto de cero. Igualmente pasa con los vectores fila.

Entonces, podemos utilizar determinantes para estudiar la independencia lineal de vectores y calcular el rango de matrices.

Teorema 3.1. *Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero.*

Podemos calcular esa matriz inversa con el **método de los cofactores**, con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T,$$

donde los A_{ij} son los cofactores de los coeficientes a_{ij}, es decir los determinantes obtenidos al eliminar la fila y la columna donde está el término a_{ij}. El esquema de signos es el mismo que en los determinantes.

Por las propiedades 1 y 3 de determinantes, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

***Ejemplo* 66.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

el determinante es

$$|A| = 1 - 2 - 4 + 2 + 2 - 2 = -3,$$

y la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} = \frac{1}{|A|}.$$

3.3 Resolución matricial de sistemas lineales

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

se escribe como producto de matrices de la forma $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{B}.$$

La existencia de soluciones depende del rango de la **matriz del sistema**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y el rango de la **matriz ampliada** (añadiendo el vector columna B)

$$\widetilde{A} = (A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

3.3.1 Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.2. *de Rouché Frobenius.*

Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución si y sólo si la matriz del sistema tiene el mismo rango que la matriz ampliada.

Observaciones:

1. Si no tienen el mismo rango, el sistema es incompatible (SI).
2. Si los rangos son iguales y coinciden con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (SCD).
3. Si los rangos son iguales pero inferiores al número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

Los sistemas con término independiente exactamente igual a cero se llaman **homogéneos**:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & 0, \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & 0, \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & 0. \end{array}\right.$$

Estos sistemas son siempre compatibles, porque una solución trivial es la idénticamente cero. Entonces habría que estudiar si solo tiene esa solución (SCD) o tiene infinitas (SCI).

3.3.2 Método de Gauss

De forma matricial este método consiste en transformar la matriz ampliada de un sistema, $\widetilde{A}$, haciendo ceros mediante operaciones con las filas hasta convertirla en una matriz de forma triangular, cuyo rango es inmediato de obtener. Esa nueva matriz corresponde a un sistema lineal equivalente al original y que se resuelve directamente.

***Ejemplo* 67.** Resolvemos de forma matricial el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & -6, \\ x & + & y & + & z & = & 2, \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3, \end{array}\right.$$

realizando las siguientes operaciones: Llamamos F_1, F_2 y F_3 a las filas y calculamos $F_2 - F_1$ y también $F_3 - 2F_1$ en el primer paso y en el segundo hacemos $F_3 - 2F_2$ obteniendo una matriz triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Vemos que $rango(A) = rango(\widetilde{A}) = 3$. Por tanto el sistema es Compatible Determinado. Resolviendo de abajo a arriba se obtiene:

$$z = 1, \quad y = \frac{8-2}{3} = 2, \quad x = -6 + 4 + 1 = -1.$$

El determinante también nos corrobora que el sistema es compatible determinado, por el Teorema de Rouché-Frobenius: $|A| = -3 \neq 0 \Rightarrow SCD$, pues el rango de A será 3.

***Ejemplo* 68.** Para el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & -6, \\ x & + & y & + & z & = & 2, \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 3, \end{array}\right.$$

realizamos las siguientes operaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 4 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Vemos que $rango(A) = 2$, $rango(\widetilde{A}) = 3$. Por tanto el sistema es Incompatible. Con el determinante comprobamos que $|A| = 0$, y por tanto el rango de A será menor que 3. El sistema podría ser SCI o SI: para concretarlo hay que utilizar el método de Gauss, como hemos visto.

***Ejemplo* 69.** Sea ahora el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & -6, \\ x & + & y & + & z & = & 2, \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4, \end{array}\right.$$

y realizamos las siguientes operaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que $rango(A) = rango(\widetilde{A}) = 2 < 3$. Por tanto el sistema es Compatible Indeterminado. Despejando:

$$y = \frac{8-2z}{3}, \quad x = -6 + \frac{2(8-2z)}{3} + z = \frac{-2-z}{3},$$

mientras que z puede tomar cualquier valor: infinitas soluciones. (Podíamos haber observado desde el principio que la tercera ecuación es equivalente a la segunda, es decir, sobra).

También podemos calcular la **matriz inversa por el método de Gauss**: Escribimos una matriz cuadrada A y la ampliamos con la matriz identidad, operamos a continuación con las filas hasta obtener en la parte de A la matriz identidad y la matriz obtenida en el lugar de la identidad es la inversa.

***Ejemplo* 70.** Tomamos una matriz cuadrada y la ampliamos con la identidad:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Operamos con las filas hasta obtener la identidad en la parte izquierda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Regla de Cramer

Si A es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

es compatible determinado y sus soluciones se calculan por las fórmulas:

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

que se obtinen sustituyendo en el determinante del numerador la columna correspondiente en orden a la incógnita (primera para x, segunda para y, tercera para z) por el término independiente.

***Ejemplo* 71.** Calculamos por este método la solución de:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -6, \\ x + y + z = 2, \\ 2x + 2y + z = 3, \end{cases}$$

Tenemos que $|A| = -3$, luego:

$$x = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad y = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$z = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

3.3.4 Sistemas con un parámetro

***Ejemplo* 72.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x - 2y - z = -6, \\ x + y + z = 2, \\ 2x + 2y + \lambda z = \lambda + 1, \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **parámetro**. La existencia de soluciones dependerá del valor de λ. Si calculamos el determinante de la matriz A asociada, se obtiene

$$|A| = \lambda - 2 - 4 + 2 + 2\lambda - 2 = 3\lambda - 6.$$

Por tanto, si $\lambda \neq 2$ el determinante es distinto de cero y el sistema es SCD. Para $\lambda = 2$ el sistema puede ser SCI o SI. Con el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda & \lambda+1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & \lambda+2 & \lambda+13 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & \lambda-3 \end{array}\right).$$

Vemos que para $\lambda \neq 2$ se tiene $rango(A) = rango(\widetilde{A}) = 3 \Rightarrow SCD$, mientras que para $\lambda = 2$ es $rango(A) = 2 < rango(\widetilde{A}) = 3 \Rightarrow SI$. Para los valores $\lambda \neq 2$ como el sistema es compatible determinado, la solución se acaba de obtener sustituyendo λ por el valor correspondiente.

– $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$P–

– $\mathcal{ERC}$–

BY NC SA