uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Apuntes

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

4

GEOMETRÍA

Este tema está dedicado a la geometría de rectas y planos en el espacio y sus posiciones relativas.

Contenido

4.1 El plano $\mathbb{R}^2$ y el espacio $\mathbb{R}^3$

En el plano $\mathbb{R}^2$ y el espacio $\mathbb{R}^3$ las **bases canónicas** respectivas son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 :& \quad \{(1,0),(0,1)\},\\ \mathbb{R}^3 :& \quad \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.\end{aligned}$$

En el plano, un par de vectores que no sean uno múltiplo del otro forman una base. En el espacio, tres vectores que tengan determinante no nulo forman una base. Un vector, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, en una base $A = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ distinta de la canónica se escribe

$$(a_1, a_2)_A = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}.$$

El número de vectores de una base es igual a la dimensión del espacio del que es base.

Recordemos el producto escalar de dos vectores, tanto en dimensión 2 como 3:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2, \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1, a_2, a_2)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

A partir del producto escalar se define la **longitud** o **norma** de un vector $\vec{a}$, que se denota por $\|\vec{a}\|$ y es:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la norma es, respectivamente:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Propiedades

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$ y $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$.
2. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$ y $|\lambda|$ es el valor absoluto de λ.
3. **Desigualdad triangular**: $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

   (El nombre hace referencia a que cualquier lado de un triángulo mide menos que la suma de los otros dos lados).
4. Si α es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos(\alpha).$$

5. Consecuencia de la anterior: dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es cero. Esto es: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

La **distancia** entre dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ es la norma del vector que los une, y se calcula:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^2}.$$

Llamamos **base ortonormal** a una base formada por vectores perpendiculares y de norma 1. Por ejemplo, las bases canónicas son ortonormales.

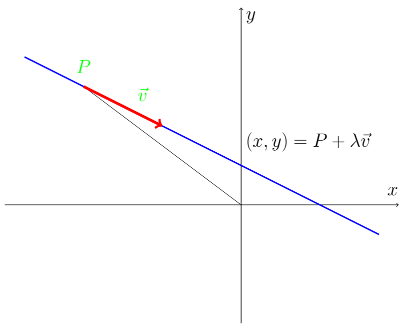

Figura 4.1: Recta en el plano.

4.1.1 Rectas en el plano y en el espacio

Una recta está determinada por dos puntos o por un punto y una dirección. Un **vector de posición** de la recta es cualquier vector que va desde el origen a un punto de la recta y un **vector de dirección** es cualquier vector que está incluído en la recta.

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por el punto P (vector de posición) y tiene vector de dirección $\vec{v}$ son

$$\vec{x} = P + \lambda\vec{v}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aquí λ es un parámetro, de ahí el nombre de las ecuaciones. Al dar valores al parámetro obtenemos los distintos puntos de la recta. En en plano, $P = (p_1, p_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y las ecuaciones son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1, \\ y = p_2 + \lambda v_2. \end{array}\right.$$

En el espacio las ecuaciones son similarmente:

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1, \\ y = p_2 + \lambda v_2, \\ z = p_3 + \lambda v_3. \end{array}\right.$$

Si eliminamos el parámetro obtenemos la **ecuación continua** de la recta. En el plano queda (si $v_1, v_2 \neq 0$):

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}.$$

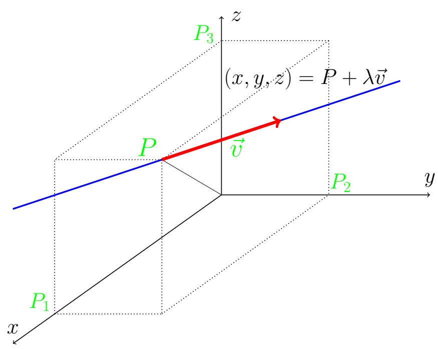

Figura 4.2: Recta en el espacio.

Si alguna de las coordenadas de $\vec{v}$ es cero la ecuación es más sencilla: Si $v_1 = 0$ entonces la ecuación de la recta es $x = p_1$ y si es $v_2 = 0$ la ecuación será $y = p_2$. Los dos no pueden ser cero a la vez. Simplificando la ecuación llegamos a la expresión más general de la recta:

$$r \equiv Ax + By + C = 0.$$

Si $B \neq 0$ podemos despejar y obtener la forma clásica de las rectas en el plano, $y = mx + b$.

***Ejemplo* 73.** La recta en el plano con vector de posición $P = (1, 3)$ y vector de dirección $(2, -1)$ tiene las ecuaciones paramétricas y continua siguientes::

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda. \end{cases} \iff \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} \iff x + 2y - 7 = 0.$$

***Ejemplo* 74.** La recta que pasa por $P = (2, 4)$ y tiene vector dirección $\vec{v} = (0, 1)$ tiene ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + \lambda. \end{cases} \iff x = 2 \iff x - 2 = 0.$$

La **distancia** de un punto $P = (p_1, p_2)$ a la recta r en el plano se calcula con la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Comprobamos que los puntos de la recta nos dan distancia cero a la recta.

En el espacio, la ecuación continua de la recta es (si $v_1, v_2, v_3 \neq 0$):

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}.$$

En este caso lo que obtenemos no es una ecuación sino dos, porque hay dos igualdades. Si alguna de las coordenadas del vector de dirección es cero haríamos como en el plano, alguna de las ecuaciones sería sencillamente $x = p_1$, ó $y = p_2$ ó $z = p_3$.

***Ejemplo* 75.** Para calcular la recta que pasa por $A = (1, 1, 2)$ y $P = (2, 4, 6)$, obtenemos el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = (1, 3, 4)$. La recta es

$$x - 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4},$$

o también

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + 3\lambda, \\ z = 2 + 4\lambda. \end{cases}$$

4.1.2 Planos en el espacio

Un plano se determina por tres puntos o por un punto (vector de posición) y dos vectores no paralelos contenidos en el plano (dos vectores de dirección).

Las **ecuaciones paramétricas** del plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene los vectores de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son:

$$\vec{x} = P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 + \mu w_1, \\ y = p_2 + \lambda v_2 + \mu w_2, \\ z = p_3 + \lambda v_3 + \mu w_3. \end{cases}$$

donde λ y μ son parámetros reales. Al dar valores a los parámetros obtenemos todos los puntos del plano.

Para poder expresar más fácilmente la ecuación del plano en el espacio necesitamos saber calcular un vector perpendicular. Para ello utilizamos la siguiente operación.

El **producto vectorial** de dos vectores del espacio, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector, que denotamos por $\vec{a} \times \vec{b}$ y se calcula formalmente con el determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

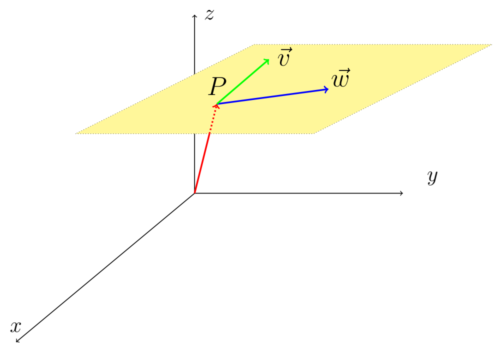

Figura 4.3: Plano en el espacio.

Donde $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, son la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$.

Propiedades

1. El producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y se dirige en el sentido de avance del sacacorchos al girar desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$.

2. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

3. Si α es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces:
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\alpha).$$

4. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

5. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

Podemos obtener un vector perpendicular a un plano calculando el producto vectorial de sus vectores de dirección. Un vector perpendicular al plano, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, es perpendicular a cualquier vector que está incluido en el plano, en particular al vector que va desde el punto por el que pasa $P = (p_1, p_2, p_3)$ a un punto cualquiera del plano, $Q = (x, y, z)$. Entonces su producto escalar será cero, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, esto es:

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

Simplificando, la ecuación tiene la forma:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0.$$

Esta es la **ecuación continua** del plano π o **ecuación general** y puede obtenerse también eliminando los parámetros λ y μ de las ecuaciones paramétricas.

***Ejemplo* 76.** Las ecuaciones paramétrias del plano que pasa por $A = (1, 1, 2)$ y tiene vectores dirección $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -3)$ es

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu, \\ y = 1 + \mu, \\ z = 2 + 2\lambda - 3\mu. \end{cases}$$

Para escribir la ecuación continua obtenemos el vector perpendicular mediante el producto vectorial

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1).$$

La ecuación continua del plano es entonces

$$-2(x-1) + y - 1 - (z-2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2x - y + z = 3.$$

***Ejemplo* 77.** Si nos piden calcular la ecuación del plano que pasa por tres puntos, $A(1, 2, 5)$, $B = (0, 3, 1)$ y $C = (1, 1, -4)$, calculamos los vectores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, -4)$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (0, -1, -9)$, y repetimos el proceso anterior.

La **distancia** de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a un plano π se calcula utilizando la ecuación general del plano, con la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Comprobamos que los puntos del plano nos dan distancia cero al plano.

4.2 Posición relativa de rectas y planos

Para saber la posición relativa de dos o más conjuntos en el espacio (rectas y planos), debemos estudiar la(s) posibles soluciones del sistema formado por sus ecuaciones.

4.2.1 Dos planos

Dos planos en el espacio pueden estar colocados de tres formas:

1. **Paralelos**: no hay intersección (los vectores perpendiculares son paralelos), el sistema que forman es incompatible, SI.
2. **Coincidentes**: ambos planos son el mismo, infinitas soluciones: todos los puntos del plano, SCI.
3. **Incidentes**: los dos planos se cortan en una recta, infinitas soluciones: todos los puntos de la recta, SCI. El vector de dirección de la recta se puede calcular como el producto vectorial de los vectores perpendiculares de ambos planos.

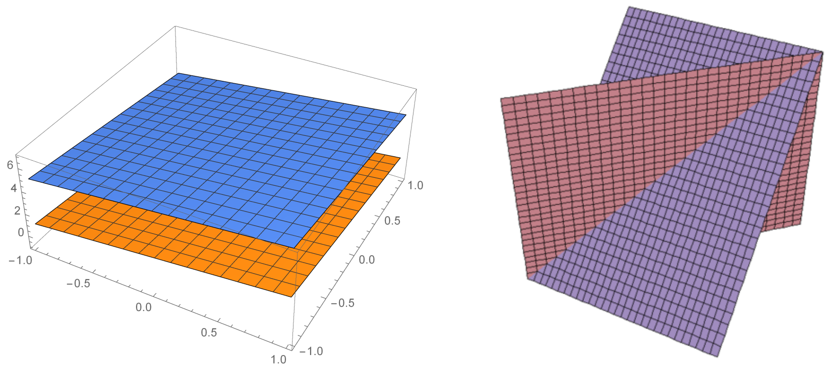

Figura 4.4: Dos planos paralelos y dos planos que se cortan a lo largo de una recta.

***Ejemplo* 78.** Estudiamos la posición de los planos:

$$\pi_1 \equiv 3x - 4y + z = 5, \qquad \pi_2 \equiv 6x - 8y + 2z = 15.$$

Se tiene el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -8 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

luego son dos planos paralelos.

***Ejemplo* 79.** Los planos

$$\pi_1 \equiv 3x - 4y + z = 5, \qquad \pi_2 \equiv 6x - 8y + 2z = 10,$$

forman el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -8 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

por tanto se trata del mismo plano.

***Ejemplo* 80.** Consideramos ahora:

$$\pi_1 \equiv x + 2y - z = 0, \qquad \pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 1.$$

El sistema que forman es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} y = z - 1 \\ x = 2 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

por tanto se cortan en la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

o lo que es lo mismo,

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y + 1 = z.$$

Obsérvese que

$$(1, 2, -1) \times (2, 3, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

que es un vector director de la recta intersección.

4.2.2 Recta y plano

Una recta y un plano en el espacio pueden ser:

1. **Coincidentes**: la recta está contenida en el plano y el sistema asociado tendrá infinitas soluciones: todos los puntos de la recta, SCI.
2. **Paralelos**: no se cortan, sistema incompatible, SI.
3. **Incidentes**: la recta y el plano se cortan en un único punto, SCD.

***Ejemplo* 81.** La posición relativa de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = y = z - 1, \qquad \pi \equiv 2x + 3y - z = 1,$$

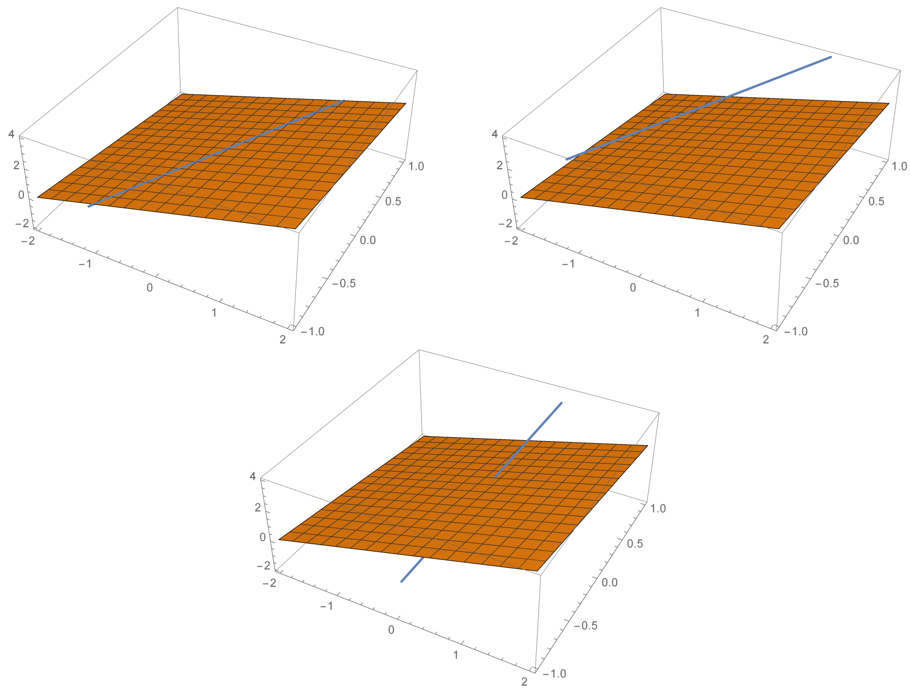

Figura 4.5: Una recta contenida en un plano, una recta paralela a un plano y una recta que corta a un plano en un punto.

se estudia con el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

que es SCI. La recta está contenida en el plano.

***Ejemplo* 82.** Consideremos ahora

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = y = z - 1, \qquad \pi \equiv 2x + 3y - z = 2.$$

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = -1 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema no tiene solución, SI, la recta y el plano son paralelos.

***Ejemplo* 83.** Dados ahora

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = y = \frac{z-1}{2}, \qquad \pi \equiv 2x + 3y - z = 2.$$

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y - z = -1 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Solución única SCD, $z = -3$, $y = -2$, $x = 1$. La recta y el plano se cortan en el punto $(1, -2, -3)$.

Observemos que el sistema es el equivalente a estudiar la intersección de tres planos.

4.2.3 Tres planos

Tres planos en el espacio pueden situarse de múltiples maneras, pero en lo que atañe a la intersección las posibilidades son: se cortan en un punto, en una recta, los tres son coincidentes o no tienen intersección común.

Cada una de estas posibilidades se puede dar por varias razones. Por ejemplo si no hay intersección común puede ser porque los tres son paralelos, o dos de ellos son paralelos y el otro los corta en dos rectas, o se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.

Para averiguarlo se estudia el sistema que forman. Aunque se puede identificar fácilmente por los vectores directores si hay planos paralelos.

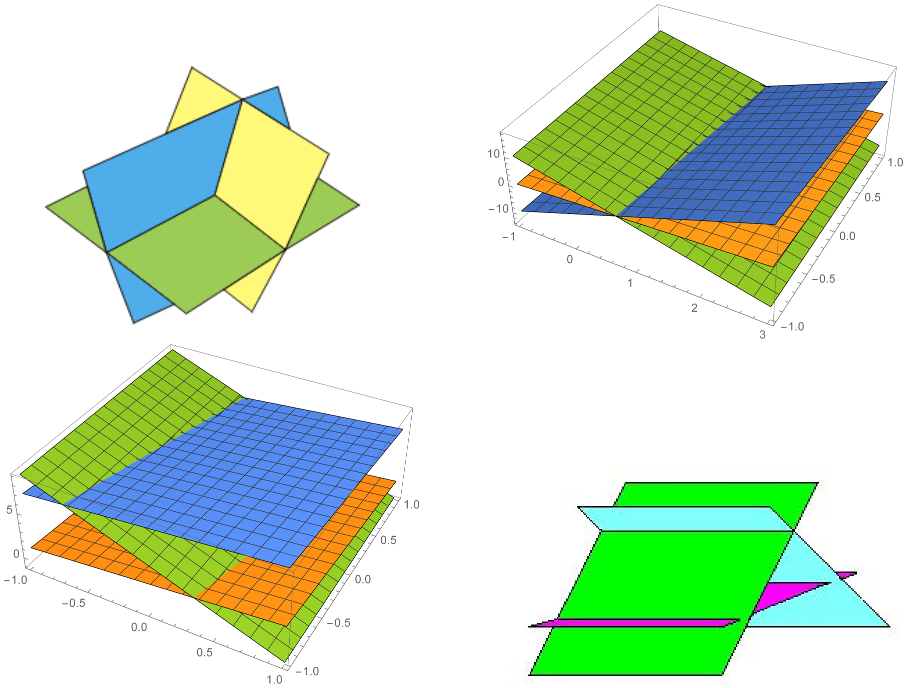

Figura 4.6: Tres planos que se cortan en un punto, tres planos que se cortan a lo largo de una recta y dos casos en los que los tres planos no tienen intersección común.

***Ejemplo* 84.** Consideremos los tres planos

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 3, \quad \pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 1, \quad \pi_3 \equiv 4x + 6y + 2z = 5.$$

El sistema que forman es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & -2 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Es un SI, no hay solución. Podíamos haber observado desde el principio que los dos últimos planos son paralelos.

***Ejemplo* 85.** Sean ahora planos

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 3, \quad \pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 1, \quad \pi_3 \equiv 3x + 2y + 2z = 4.$$

El sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Es un SCI, infinitas soluciones, $y = \dfrac{z-5}{5}$, $x = \dfrac{10-4z}{5}$, $z \in \mathbb{R}$. Los planos se cortan en una recta,

$$\begin{cases} x = \dfrac{10-4t}{5} \\ y = \dfrac{t-5}{5} \\ z = t \end{cases}$$

***Ejemplo* 86.** Sean ahora los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 3, \quad \pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 1, \quad \pi_3 \equiv 3x + 2y + 3z = 5.$$

El sistema que determinan es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Es un SCD, solución única $z = 1$, $y = -4/5$, $x = 6/5$. Los planos se cortan en el punto $(6/5, -4/5, 1)$.

4.2.4 Dos rectas

En el caso de dos rectas, pueden cortarse en un punto o que no se corten, se crucen. Habría que resolver un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

***Ejemplo* 87.** Para estudiar la posición relativa de las dos rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y + 1 = \frac{z-4}{-2}, \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = z - 2,$$

estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x - 2 = -y - 1 \\ -2x + 4 = -z + 4 \\ -3x + 3 = 2y \\ x - 1 = 2z - 4 \end{cases}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

No es necesario hacer más ceros en la matriz pues se puede resolver desde la tercera fila $y = 0$, a continuación la primera $x = 1$, y nos queda entonces la segunda y cuarta que dan lo mismo, $z = 2$. Por tanto las rectas se cortan en el punto $P = (1, 0, 2)$.

***Ejemplo* 88.** Estudiemos ahora la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{z+2}{-1}.$$

El sistema es

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x - 2z = -5 \\ x - 3y = 3 \\ x + 3z = -6 \end{cases}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 58 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{array}\right).$$

Vemos que el sistema es incompatible y las dos rectas se cruzan, no se cortan.

También se puede intentar resolver directamente: de las ecuaciones primera y tercera se obtiene $x = -21$, $y = -8$, mientras que de la segunda y la cuarta se obtiene $x = -81/7$, $z = 13/7$, que es una contradicción.

4.3 Áreas y volúmenes

Por las propiedades del producto vectorial podemos calcular áreas de paralelogramos y triángulos:

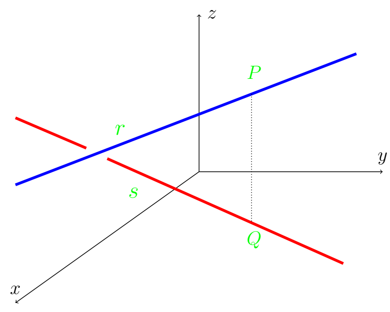

Figura 4.7: Dos rectas que se cruzan.

1. El **área del paralelogramo** determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el módulo del producto vectorial de esos vectores, es decir:

$$\text{Área } = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \ \Big(= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\alpha)\Big).$$

2. El **área del triángulo** que determinan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$\text{Área } = \frac{1}{2}\, \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

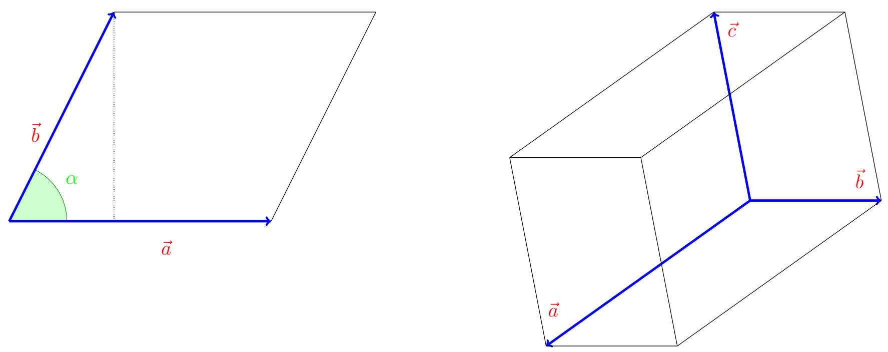

Figura 4.8: Área de un paralelogramo y volumen de un paralelepípedo.

***Ejemplo* 89.** El área del triángulo determinado por los vectores $(1,1,1)$ y $(2,-2,1)$ es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,\|(1,1,1)\times(2,-2,1)\| = \| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \| = \|(3,1,-4)\| = \sqrt{26}.$$

También podemos calcular fácilmente algunos volúmenes:

1. El **volumen del paralelepípedo** determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:

   $$\text{Volumen} = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

   Esa expresión es el módulo del **producto mixto** de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, que se calcula fácilmente como:

   $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. El **volumen del tetraedro** que determinan los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:

   $$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\,|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

***Ejemplo* 90.** Para el volumen del paralelepídedo determinado por $(1,1,1)$, $(2,-2,1)$ y $(1,-3,0)$ calculamos el producto mixto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

y el volumen es entonces $V = |-3| = 3$.

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–

– $\mathcal{ERC}$–