uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 1

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

Índice

1. Cálculo diferencial

1.1. Funciones de variable real

Problema 1.1.1

a) Desarrolla las funciones $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (2x-5)(x+4)$, $h(x) = (x+2)(x-2)$.

b) Completa cuadrados en la expresión $x^2 + 8x + 20$.

Problema 1.1.2

a) Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

b) Descompón la función $f(x) = x^2 - 7x + 12$ en producto de factores simples.

c) Descompón la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sabiendo que $f(2) = 0$.

Problema 1.1.3 Encuentra el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

$$i)\quad A = \{\, x^2 - 5x + 6 \geq 0 \,\}, \qquad ii)\quad B = \{\, x^3(x+3)(x-5) < 0 \,\},$$

$$iii)\quad C = \{\, \frac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0 \,\}, \qquad iv)\quad D = \{\, 4x < 2x+1 \leq 3x+2 \,\}.$$

Problema 1.1.4 Representa las rectas en el plano

$$i)\quad y = 2x - 3, \qquad ii)\quad y = -3x + 1, \qquad iii)\quad 4x + 5y - 2 = 0.$$

Problema 1.1.5 Representa las curvas en el plano

$$i)\quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5, \qquad ii)\quad x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0, \qquad iii)\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Problema 1.1.6 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$,

a) Escribe la ecuación de la circunferencia concéntrica de radio 7.

b) Calcula la distancia de la cicunferencia al origen.

Problema 1.1.7 Representa los siguientes conjuntos en el plano

$$i)\quad A = \{\, -1 < x - y < 1 \,\}, \qquad ii)\quad B = \{\, x^2 < y < x \,\},$$

$$iii)\quad C = \{\, (x-1)^2 + (y+2)^2 < 4 \,\}, \qquad iv)\quad D = \{\, 4x^2 + y^2 \leq 4,\ xy \geq 0 \,\},$$

$$v)\quad E = \{\, 1 \leq x^2 + y^2 < 9,\ y \geq 0 \,\}.$$

Problema 1.1.8 Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$i)\quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \qquad ii)\quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$iii)\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}, \qquad iv)\quad f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}},$$

$$v)\quad f(x) = \frac{1}{1 - \log x}, \qquad vi)\quad f(x) = \log(x - x^2),$$

$$vii)\quad f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\log x}, \qquad viii)\quad f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}.$$

Problema 1.1.9 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$i)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad ii)\quad f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1},$$

$$iii)\quad f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad iv)\quad f(x)=(\cos x^3)(\operatorname{sen} x^2)\mathrm{e}^{-x^4}.$$

Problema 1.1.10 Dadas $f(x)=x^3$, $g(x)=x+\sqrt{x}$, $h(x)=e^x$, halla:

$$i)\ f\circ g,\qquad ii)\ g\circ f,\qquad iii)\ f\circ h,\qquad iv)\ h\circ g\circ f.$$

Problema 1.1.11 Si $\operatorname{sen} x = 3/5$ y $x\in(\pi/2,\pi)$, calcula $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$.

Problema 1.1.12 Calcula $\operatorname{tg}\pi/4$ y $\operatorname{tg} 3\pi/4$.

Problema 1.1.13 Calcula $\operatorname{tg}(a+b)$ en términos de $\operatorname{tg} a$ y $\operatorname{tg} b$.

Problema 1.1.14 Para qué valor de a se verifica $\log_a 12+\log_a 3=2$.

Problema 1.1.15 Sea la función $f(x)=\log_a(x+b)$. Calcula a y b sabiendo que $f(0)=0$ y $f(-3/4)=-1$.

Problema 1.1.16 Representa la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le 1\\ 3 & \text{si } 1<x\le 3\\ 6-x & \text{si } x>3\end{cases}$$

1.2. Límites y continuidad

Problema 1.2.1 Calcula los siguientes límites:

$$i)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x},\qquad ii)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2},$$

$$iii)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1},\qquad iv)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1},$$

$$v)\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\cos x}{(x-\pi)^2},\qquad vi)\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4},$$

$$vii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2},\qquad viii)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right),$$

$$ix)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},\qquad x)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}.$$

Problema 1.2.2 Calcula los siguientes límites:

$$i) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x-1}{7x^2+x+2}, \qquad ii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}},$$

$$iii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}, \qquad iv) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right),$$

$$v) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}, \qquad vi) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$$

$$vii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}, \qquad viii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x^3}{5x+6}.$$

Problema 1.2.3 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x<2, \\ a+x^2, & x\geq 2, \end{cases}$$

halla a de modo que f sea continua para todo x.

Problema 1.2.4 Halla k de manera que sea continua la función siguiente y dibuja la gráfica correspondiente:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 1\,, & x\geq 0, \\ x^2+k\,, & x<0. \end{cases}$$

Problema 1.2.5 Determina el dominio y estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{\cos x}}, & x>0, \\[2ex] \dfrac{x^2}{x+1}, & x\leq 0. \end{cases}$$

Problema 1.2.6 Demuestra que existe algún número real $x\in(0,1)$ tal que $x^4 = \dfrac{1}{x^7+1}$.

Problema 1.2.7 Demuestra que existe algún punto en que $\cos x = 2x-1$.

1.3. Derivabilidad

Problema 1.3.1 A partir de la definición, calcula la derivada de $f(x)=x^3$.

Problema 1.3.2 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{llll}
i) & f(x) = x^2 + 5\cos x, & ii) & f(x) = x\cos x, \\[2mm]
iii) & f(x) = \dfrac{\cos x}{x}, & iv) & f(x) = \operatorname{tg} x, \\[2mm]
v) & f(x) = \cos(x^2), & vi) & f(x) = \log(x^2 + 5x), \\[2mm]
vii) & f(x) = \operatorname{tg}(e^{x^2}), & viii) & f(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos^2 x}, \\[2mm]
ix) & f(x) = \operatorname{sen}^2(x^2 + 1), & x) & f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \\[2mm]
xi) & f(x) = \log(\operatorname{sen} x + 1), & xii) & f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\cos x.
\end{array}
$$

Problema 1.3.3 Sea la función

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 0, \\ x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}
$$

Estudia si f es continua en $x = 0$. Estudia su derivabilidad en el punto $x = 0$.

Problema 1.3.4 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, en el punto $x = 0$, $y = 1/2$.

Problema 1.3.5 Halla la recta tangente a la curva $f(x) = 2e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Problema 1.3.6 Calcula los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hôpital:

$$
\begin{array}{llll}
i) & \displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & ii) & \displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}, \\[2mm]
iii) & \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, & iv) & \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \\[2mm]
v) & \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3}, & vi) & \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 7x}{x^3 + 1}, \\[2mm]
vii) & \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}, & viii) & \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}.
\end{array}
$$

Problema 1.3.7 Utiliza la Regla de L'Hôpital para calcular los apartados de los problemas 1.2.1 y 1.2.2 donde se pueda aplicar.

Problema 1.3.8 Calcula el máximo y el mínimo de las funciones siguientes en los intervalos que se indican:

$$
\begin{array}{llll}
i) & f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3), & \text{en} & [-2, 2], \\[2mm]
ii) & f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, & \text{en} & [-2, 3], \\[2mm]
iii) & f(x) = |x + 1|, & \text{en} & [-2, 1],
\end{array}
$$

Problema 1.3.9 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de radio 3.

Problema 1.3.10 Para hacer una caja abierta por arriba recortamos de una lámina de cartón cuadrada de $10dm$ de lado cuatro cuadrados, cada uno de uno de los vértices. ¿Cuál debe ser el lado de esos cuadrados para que el volumen de la caja sea máximo?

Problema 1.3.11 Un fabricante de salsa de tomate necesita latas cilíndricas de volumen fijo $V = 1500cc$. Calcula el radio de la base de la lata y su altura para que la construcción requiera el mínimo gasto de material.

Problema 1.3.12 Un agricultor tiene una finca, por la que pasa un río (que suponemos sigue un curso rectilíneo). Desea vallar una parcela rectangular, uno de cuyos lados será la orilla del río, ocupando una superficie de $180{,}000m^2$. Halla las dimensiones que debe tener la parcela, si se quiere emplear el mínimo alambre posible para vallar los tres lados restantes.

Problema 1.3.13 Representa gráficamente las funciones:

i) $f(x) = x^3 - 4x$, *ii)* $f(x) = (x-2)^2(x+1)$,

iii) $f(x) = (x^2-1)(x^2+3)$, *iv)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

v) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$, *vi)* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$,

vii) $f(x) = 2\cos^2 x$, *viii)* $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–