uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 3

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

3. Álgebra lineal

3.1. Sistemas lineales de ecuaciones

Problema 3.1.1 Resuelve los siguientes sistemas:

$$i) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{array} \right. \qquad ii) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{array} \right. \qquad iii) \left\{ \begin{array}{l} 5x - 6y = 9 \\ 9x + 8y = 35 \end{array} \right.$$

Problema 3.1.2 Halla dos números tales que su producto sea 1200, y su cociente sea 1/3.

Problema 3.1.3 Con 10 euros que le ha dado su madre Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidesnatada por un total de 9.60 euros. Si el paquete de leche entera cuesta 1.15 euros y el de semidesnatada 0.90 euros, ¿cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?

Problema 3.1.4 Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el doble. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?

Problema 3.1.5 Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 10 euros diarios menos que el segundo, pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo sólo 24. Si el primero ha ganado 660 euros más que el segundo calcula el salario diario de cada obrero.

Problema 3.1.6 Resuelve los sistemas lineales siguientes:

$$i) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x + y - z = 3 \end{array} \right. \qquad ii) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$$

$$iii) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \end{array} \right. \qquad iv) \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2y = 6 \end{array} \right.$$

$$v) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 4x - 5y + 7z = 5 \end{array} \right. \qquad vi) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 4x - 5y + 7z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 3.1.7 Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 3.1.8 Un mayorista del sector turístico vende a tres agencias de viajes: a la agencia A le vende 10 billetes a destinos nacionales, 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios y 10 a destinos no comunitarios, cobrando por todo ello 12000 euros; a la agencia B vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos no comunitarios, por un importe total de 13000 euros; y finalmente vende a la agencia C 10 billetes para destinos nacionales y otros 10 para destinos extranjeros comunitarios, por un importe de 7000 euros. Calcula el precio de cada billete.

Problema 3.1.9 Representa en el plano los conjuntos de rectas siguientes y describe el conjunto intersección en cada caso

$$i)\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \qquad iii)\ \begin{cases} 5x-6y=9 \\ 9x+8y=35 \\ 2x+7y=22 \end{cases}$$

3.2. Vectores y matrices

Problema 3.2.1 Dados los vectores $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(-1,1)$, dibuja en el plano los vectores $\vec{v}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}_2=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v}_3=2\vec{a}-3\vec{b}$.

Problema 3.2.2 Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores $(2,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,-1)$.

Problema 3.2.3 Escribe el vector $\vec{u}=(1,-2,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,0,1)$, $\vec{w}=(1,1,-1)$.

Problema 3.2.4 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^2, $AB, BA, 2A-3B$, $A+2I$.

Problema 3.2.5 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, calcula a para que se verifique $A^2=I$.

Problema 3.2.6 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 4/5 \\ -4/5 & a \end{pmatrix}$, calcula los valores de a para los que se verifica que la traspuesta de A coincide con su inversa.

Problema 3.2.7 Realiza las siguientes operaciones con matrices:

$$i)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad ii)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.8 Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

halla la matriz traspuesta A^T, y los productos A^TA y AA^T.

Problema 3.2.9 Utiliza el método de Gauss para hallar las matrices inversas de

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.10 Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

halla la matriz A tal que $AB = C$.

Problema 3.2.11 Calcula los siguientes determinantes:

$$i) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad ii) \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad iii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$iv) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad v) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad vi) \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Problema 3.2.12 Utiliza las propiedades de los determinantes para hallar:

$$i) \begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & x+5 & x+9 \\ x+3 & x+5 & x+7 \end{vmatrix} \qquad ii) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Problema 3.2.13 Calcula el rango de las matrices:

$$i) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad iii) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.14 Dependiendo de los valores del parámetro a, discute el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.15 Halla k de manera que no tenga inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.16 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

$b)$ Para $a = 2$ calcula la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

$c)$ Para $a = 2$ calcula la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$AX - A^2 = A^T$$

3.3. Resolución matricial de sistemas lineales

Problema 3.3.1 Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 5x+3y-2z=-2 \\ x+y=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$$

Problema 3.3.2 Resuelve el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.3 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula a y b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

b) Calcula c y d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

c) Calcula todas las soluciones del sistema lineal

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.4 Dadas las matrices

$$A = (2 \quad 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices $M = AB$, $N = BA$, $P = N - I$.

b) Calcula P^{-1}.

c) Resuelve el sistema $PX = C$.

Problema 3.3.5 Resuelve los problemas 3.1.1 y 3.1.6 utilizando el método de Cramer.

Problema 3.3.6 Estudia en función del parámetro a la solubilidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=1 \\ ax+y+z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema anterior cuando $a = 2$.

Problema 3.3.7 Discute según los valores del parámetro a el sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+y+z=a \\ x-y+az=2 \end{cases}$$

Problema 3.3.8 Se considera el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda \\ \lambda y + z = 1 \\ \lambda x - y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuelve el sistema para $\lambda = 3$.

Problema 3.3.9 Estudia en función del parámetro k la solubilidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

Problema 3.3.10 Estudia, en función de los parámetros a y b, la solubilidad del sistema

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Resuélvelo en el caso $a = -1$, $b = 1$.

Problema 3.3.11 Aplica el método de Gauss para discutir (en términos del parámetro α) el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = \alpha \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–