

uc3m

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad
para mayores de 25 años

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



4. Geometría

4.1. El plano \mathbb{R}^2 y el espacio \mathbb{R}^3

Problema 4.1.1 Sean los vectores $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 3, -4)$ y los puntos $A = (0, 1, -3)$ y $B = (3, 0, -1)$. Calcula

- La norma de \vec{u} , de \vec{v} y de \overrightarrow{AB} .
- Los productos escalar y vectorial de \vec{u} y \vec{v} .
- El coseno del ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
- Un vector perpendicular a \overrightarrow{AB} .
- Un vector perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} de norma 1.
- El rango del conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\}$.

Problema 4.1.2 Determina el valor de x para que los vectores $\vec{a} = (1, 4, 2)$ y $\vec{b} = (x, 1, 3)$ sean ortogonales.

Problema 4.1.3 Se consideran los vectores $\vec{u} = (-2, 2, 3)$, $\vec{v} = (\alpha, 2, 4)$ y $\vec{w} = (-1, \beta, 1)$.

- Determina los valores de α y β sabiendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$.
- Halla el ángulo que forman \vec{u} y \vec{w} .

Problema 4.1.4 Halla la ecuación de una recta r que pasa por el punto $P = (2, -1/2)$ y es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.

Problema 4.1.5 Halla la distancia del punto $P = (2, 1)$ a la recta $r \equiv 3x + y - 6 = 0$.

Problema 4.1.6 Halla la distancia del punto $P = (1, 1)$ a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2}.$$

Problema 4.1.7 Dados los puntos $P = (1, 0)$, $Q = (-1, 1)$ y $R = (2, 1)$ y las rectas

$$r_1 \equiv 3x + y = 4, \quad r_2 \equiv x - 2y = -1,$$

se pide:

- Distancia de P a Q .
- El coseno del ángulo que forman los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} .
- El coseno del ángulo que forman las rectas r_1 y r_2 .
- Ecuación cartesiana de la recta que pasa por P y es perpendicular a r_1 .
- Distancia de Q a r_2 .

Problema 4.1.8 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 2)$ y tiene vector de dirección $\vec{v} = (2, 3, 1)$.

Problema 4.1.9 Dados $P = (1, 1, -1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $\vec{u} = (-1, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, -1)$, halla las ecuaciones de las siguientes rectas en el espacio.

- Recta que pasa por P con vector director $\vec{u} - \vec{v}$.
- Recta que pasa por P y Q .
- Recta que pasa por Q con vector director $3\vec{v}$.

Problema 4.1.10 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Problema 4.1.11 ¿Son coplanarios los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, -3, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, 3)$?

Problema 4.1.12 Halla el valor de α para el cual los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (-2, 1, 3)$ y $D = (\alpha, \alpha - 1, 2)$ sean coplanarios.

Problema 4.1.13 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, y $\vec{v} = (2, 3, 1)$.

Problema 4.1.14 Encuentra un plano perpendicular al vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y que pasa por el punto $P = (1, 0, 1)$.

Problema 4.1.15 Dados $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$, $R = (0, 1, -1)$, $\vec{u} = (0, 1, -1)$ y $\vec{v} = (5, 1, 2)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos:

- Plano que pasa por P , Q y R .
- Plano que pasa por P y R y es paralelo a la recta con vector director $\vec{u} - \vec{v}$ que pasa por Q .
- Plano que contiene a R con vectores de dirección $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $2\vec{u} + \vec{v}$.

Problema 4.1.16 Escribe las ecuaciones de los siguientes planos y rectas en \mathbb{R}^3 :

- Recta que pasa por $Q = (0, 2, 1)$ y es paralela al plano $\pi_1 \equiv 3x - z + 2 = 0$ y al plano π_2 que pasa por $P = (1, 0, 1)$, Q y el origen.
- Plano paralelo a la recta $r \equiv (2, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1)$ y que pasa por los puntos $R = (1, 3, 0)$ y Q .
- Plano que pasa por $S = (2, 1, 1)$ y contiene a la recta

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ -2y + z = 1 \end{cases}$$

Problema 4.1.17 Halla la distancia del punto $P = (2, 1, 0)$ al plano $\pi \equiv x + 3y - z = 1$.

Problema 4.1.18 Calcula la distancia entre los dos planos paralelos:

$$3x - 2y + z + 5 = 0, \quad 3x - 2y + z - 21 = 0.$$

Problema 4.1.19 Comprueba que la recta y el plano siguientes son paralelos

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{5}, \quad \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 2\mu \\ y = 1 + 4\lambda - 3\mu \\ z = 1 + 5\lambda - \mu, \end{cases}$$

y halla la distancia entre ellos.

Problema 4.1.20 Dados los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (2, 3, -2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x - y + z = 3, \quad \pi_2 \equiv x + 2y - z = 2,$$

se pide:

- Distancia de P a Q y de Q a R .
- El coseno del ángulo que forman π_1 y π_2 .
- Ecuación del plano perpendicular al vector \overrightarrow{PQ} que pasa por R .
- Ecuaciones de la recta perpendicular al plano π_1 que pasa por R .
- Ecuación del plano perpendicular a la recta intersección de π_1 con π_2 y que pasa por Q .

Problema 4.1.21 Halla la distancia del punto $P = (2, 1, 0)$ a la recta que pasa por $R = (1, 1, 1)$, con vector director $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Problema 4.1.22 Halla la distancia entre los pares de rectas:

$$i) \frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad \frac{x-7}{6} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-2}{-2};$$

$$ii) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

4.2. Posición relativa de rectas y planos

Problema 4.2.1 Determina los valores de α y β para que los siguientes planos sean paralelos,

$$-6x + \alpha y - 4z - 9 = 0, \quad 9x - 3y + \beta z + 7 = 0.$$

Problema 4.2.2 Determina la posición relativa de los planos

$$x + y - z = 2, \quad 3x - y - 3z = -4.$$

Problema 4.2.3 Determina, si es posible, la intersección de los siguientes pares de planos

$$i) \pi_1 \equiv x - y + z = 1, \quad \pi_2 \equiv 2x + 2y - 3z = 4;$$

$$ii) \pi_1 \equiv (x, y, z) = \lambda(1, 1, -1) + \mu(0, 1, -2), \quad \pi_2 \equiv (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 1, -1) + s(2, 3, 5);$$

$$iii) \pi_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda - 5\mu, \end{cases} \quad \pi_2 \equiv x - 6y + 3z + 1 = 0.$$

Problema 4.2.4 Determina la posición relativa de la recta y el plano

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z-4, \quad \pi \equiv 3x - 2y + z = 3.$$

Problema 4.2.5 Determina la intersección de los tres planos

$$\pi_1 \equiv 2x - y + 3z = 2, \quad \pi_2 \equiv x + 2y - 4z = 1, \quad \pi_3 \equiv x + 7y - 15z = 1.$$

Problema 4.2.6 Determina, en función del parámetro k , la posición relativa de los tres planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + ky + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y - kz = 2 \\ \pi_3 \equiv 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

Problema 4.2.7 Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = z-4, \quad s \equiv x+2 = \frac{y-7}{2} = \frac{z+5}{2}.$$

Problema 4.2.8 Estudia la posición relativa de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 5\lambda, \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{3}.$$

Problema 4.2.9 Estudia, en función del parámetro β , la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = y = z, \quad s \equiv \frac{x+1}{\beta} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2},$$

4.3. Áreas y volúmenes

Problema 4.3.1 Halla el área del triángulo de vértices $A = (1, 2, 0)$; $B = (3, 1, 1)$; $C = (0, 1, 2)$.

Problema 4.3.2 Halla el volumen del tetraedro formado por los puntos

$$A = (1, 1, 1); \quad B = (3, 1, 4); \quad C = (-2, -4, -6); \quad D = (-3, 4, -1).$$

Problema 4.3.3 Calcula el volumen de un cubo que tiene dos de sus caras en los planos

$$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 2x - 2y + z - 5 = 0.$$

Problema 4.3.4 Tres de los vértices de un tetraedro de volumen 6 son $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 4, 0)$, $C = (5, 1, 0)$. Halla el cuarto vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda. \end{cases}$$

- A₃P-
- ERC-

