uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Resolución problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 1

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

1. Cálculo diferencial

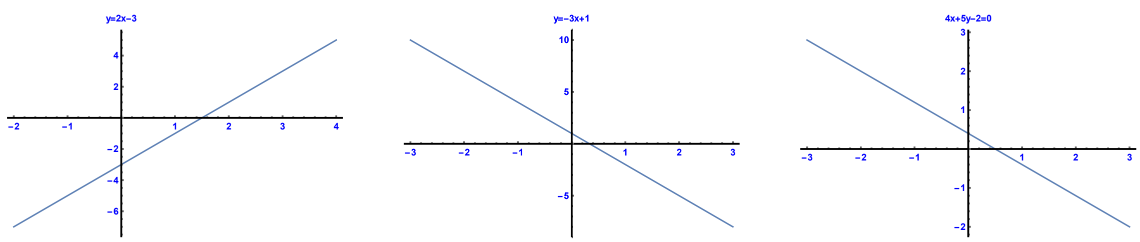
1.1. Funciones de variable real

Problema 1.1.1 *a)* $(x-3)^2 = x^2-6x+9$, $(2x-5)(x+4) = 2x^2+3x-20$, $(x+2)(x-2) = x^2-4$. *b)* $x^2+8x+20 = (x+4)^2+4$.

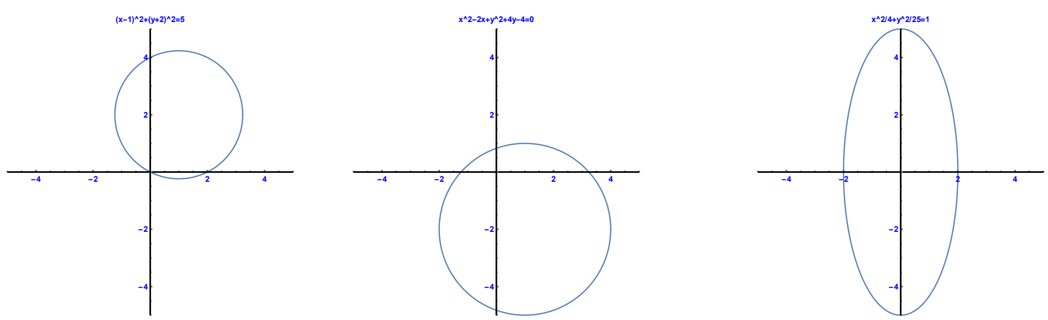
Problema 1.1.2 *a)* $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} \rightsquigarrow x = 4, x = 3$. *b)* Por las soluciones halladas, $x^2-7x+12 = (x-4)(x-3)$. *c)* Por Ruffini, $x^3-6x^2+11x-6 = (x-2)(x^2-4x+3)$, pero $x^2-4x+3 = 0$ implica $x = 3$, $x = 1$, por tanto $x^3-6x^2+11x-6 = (x-2)(x-3)(x-1)$.

Problema 1.1.3 *i)* $A = \{\, x^2-5x+6 \geq 0 \,\} = \{\, (x-2)(x-3) \geq 0 \,\} = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$; *ii)* $B = \{\, x^3(x+3)(x-5) < 0 \,\} = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$; *iii)* $C = \{\, \dfrac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0 \,\} = \{\, \dfrac{2(x+4)}{(x+1)(x+7)} > 0 \,\} = (-7, -4) \cup (-1, \infty)$; *iv)* $D = \{\, 4x < 2x+1 \leq 3x+2 \,\} = \{\, 4x < 2x+1 \,\} \cap \{\, 2x+1 \leq 3x+2 \,\} = \{\, x < 1/2 \,\} \cap \{\, x \geq -1 \,\} = [-1, 1/2)$.

Problema 1.1.4

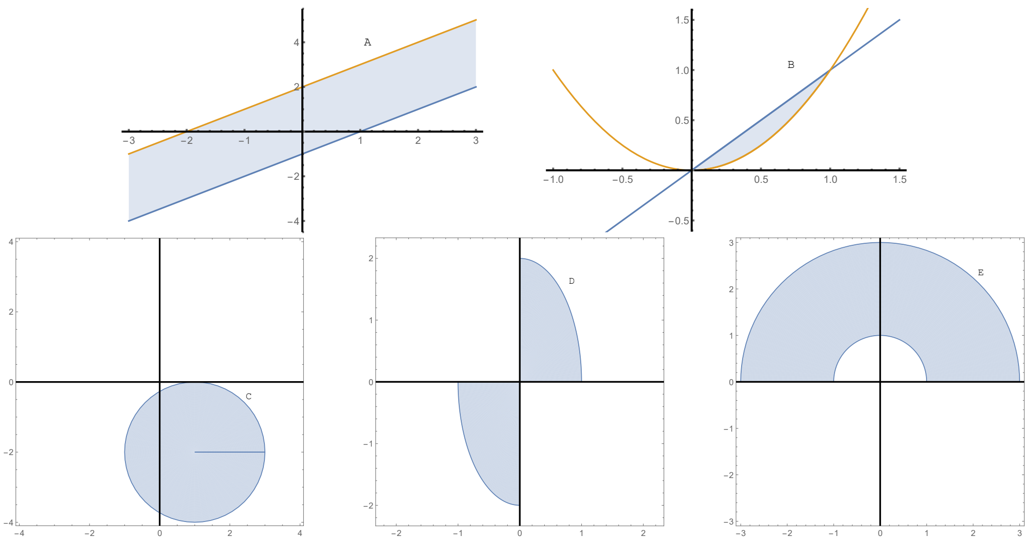


Problema 1.1.5 *i)* Circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio $\sqrt{5}$; *ii)* completando cuadrados, $(x-1)^2+(y+2)^2 = 4+1+4 = 9$, circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio 3; *iii)* elipse de vértices $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 5)$.



Problema 1.1.6 *a)* Completando cuadrados $(x+4)^2+(y-3)^2 = -9+16+9 = 4$, es decir, circunferencia de centro $(-4, 3)$ y radio 4; la circunferencia concéntrica pedida será $(x+4)^2+(y-3)^2 = 49$. *b)* La distancia de la circunferencia al origen será la distancia del centro al origen menos el radio de la circunferencia; como $dis((-4, 3), (0, 0)) = \sqrt{16+9} = 5$, la distancia pedida es 1.

Problema 1.1.7 *i)* $A = \{\, -1 < x-y < 1 \,\} = \{\, x-1 < y < x+1 \,\}$, banda entre dos rectas; *ii)* conjunto entre la parábola y la recta; *iii)* interior de la circunferencia; *iv)* interior de la elipse en los cuadrantes primero y tercero (donde x e y tienen el mismo signo y así el producto es ≥ 0; *v)* conjunto entre las circunferencias en el semiplano superior (medio anillo).



Problema 1.1.8 *i)* $D = \mathbb{R} - \{x = 2,\, x = 3\}$; *ii)* $D = \{x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; *iii)* $D = \{9 - x^2 > 0\} = (-3, 3)$; *iv)* $D = \{4 - x^2 \geq 0,\, 1 - \sqrt{4 - x^2} \geq 0\} = \{3 \leq x^2 \leq 4, \} = [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$; *v)* $D = \{x > 0,\, 1 - \log x \neq 0\} = (0, e) \cup (e, \infty)$; *vi)* $D = \{x - x^2 > 0\} = (0, 1)$; *vii)* $D = \{5 - x \geq 0,\, x > 0,\, \log x \neq 0\} = (0, 1) \cup (1, 5]$; *viii)* $D = \{1 - x^2 \geq 0,\, x - \sqrt{1 - x^2} \neq 0\} = \{x^2 \leq 1,\, x \neq \pm 1/\sqrt{2}\} = [-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.

Problema 1.1.9 *i)* Es simétrica impar pues $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$; *ii)* no tiene simetría pues $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$;) es simétrica par pues $f(-x) = \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = f(x)$; *iv)* es simétrica par.

Problema 1.1.10 *i)* $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + \sqrt{x}) = (x + \sqrt{x})^3$; *ii)* $g \circ f(x) = g(x^3) = x^3 + \sqrt{x^3}$; *iii)* $f \circ h(x) = f(e^x) = (e^x)^3 = e^{3x}$; *iv)* $h \circ g \circ f(x) = h(x^3 + \sqrt{x^3}) = e^{x^3 + \sqrt{x^3}}$.

Problema 1.1.11 En el segundo cuadrante el coseno es negativo, por lo que $\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - 9/25} = -4/5$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{3/5}{-4/5} = -3/4$.

Problema 1.1.12 $\pi/4$ es el ángulo de la bisectriz del primer cuadrante, por lo que el seno y el coseno serán iguales, y así $\operatorname{tg} \pi/4 = \dfrac{\operatorname{sen} \pi/4}{\cos \pi/4} = 1$; $3\pi/4$ es el ángulo de la bisectriz del segundo cuadrante, por lo que el seno y el coseno serán iguales de signo distinto, y así $\operatorname{tg} 3\pi/4 = -1$.

Problema 1.1.13 $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\ \operatorname{tg} b}$.

Problema 1.1.14

$$\log_a 12 + \log_a 3 = 2 \;\Leftrightarrow\; \log_a 36 = 2 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 36 \;\Leftrightarrow\; a = 6,$$

o también

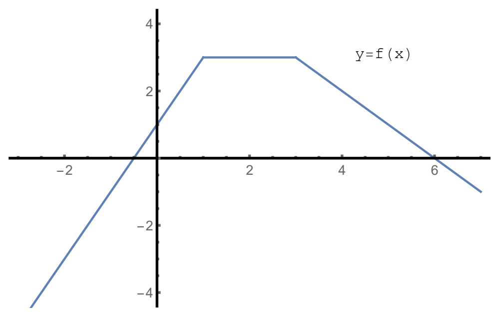
$$\log_a 36 = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\log 36}{\log a} = 2 \;\Leftrightarrow\; \log a = \frac{\log 36}{2} = \log 6 \;\Leftrightarrow\; a = 6.$$

Problema 1.1.15

$$0 = f(0) = \log_a b \ \Rightarrow \ b = 1,$$

$$-1 = f(-3/4) = \log_a(1/4) \ \Rightarrow \ a^{-1} = 1/4 \ \Rightarrow \ a = 4.$$

Problema 1.1.16



1.2. Límites y continuidad

Problema 1.2.1 $i)$ $L = 0$, $ii)$ $L = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$, $iii)$ $L = \lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1} = 0$, $iv)$ $L = \lim_{x\to 1}\dfrac{x+2}{((x-1)((x+1)}$ no existe, $v)$ $L = \infty$, $vi)$ $L = \lim_{x\to 4}(\sqrt{4}+2) = 4$, $vii)$ $L = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}$, $viii)$ $L = \lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, $ix)$ $L = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x}} = e$, $x)$ $L = \lim_{x\to 0}\log\left((1+x)^{1/x}\right) = \log e = 1$.

Problema 1.2.2 $i)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1}{7}$, $ii)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{\frac{7}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

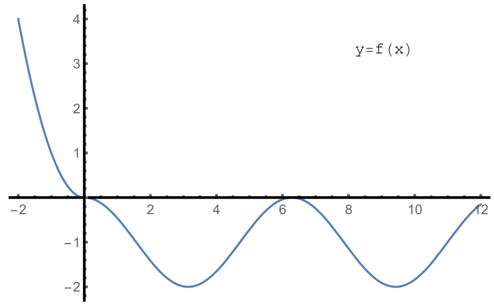
$iii)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}} = 1$, $iv)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+1}} = 2$,

$v)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}} = 1$, $vi)$ $L = 1$, $vii)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}} = \dfrac{1}{2}$,

$viii)$ $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\operatorname{sen} x^3}{x}}{5+\frac{6}{x}} = \dfrac{1}{5}$.

Problema 1.2.3 f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo posiblemente en $x = 2$, pues a ambos lados es una función continua (un polinomio a la derecha y una raíz con radicando positivo, a la izquierda. En $x = 2$ tenemos $f(2) = a+4$, mientras que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(a+x^2) = a+4$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}\sqrt{2-x} = 0$. Por tanto a debe valer -4.

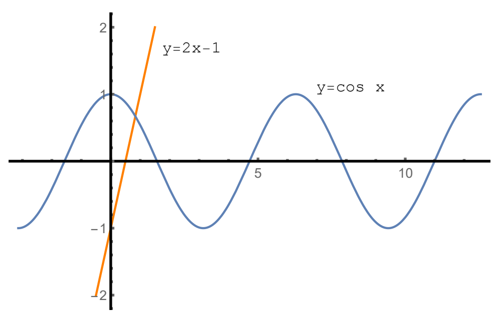
Problema 1.2.4 f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo posiblemente en $x = 0$, pues a ambos lados es una función continua. En $x = 0$ tenemos $f(0) = 0$, mientras que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+k) = k$. Por tanto k debe valer 0.



Problema 1.2.5 Para $x>0$ debemos tener $\cos x>0$, es decir, $x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k=1,2,3\cdots$. Para $x<0$ debemos tener $x+1\neq 0$, es decir, $x\neq -1$. En $x=0$ tenemos $f(0)=0$. El dominio es pues $D=(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$. Para $x=0$ se tienee $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+1}{\cos x}}=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x+1}=0$. La función es continua en su dominio salvo en $x=0$.

Problema 1.2.6 Sea $f(x)=x^4-\frac{1}{x^7+1}$. Como $f(0)=-1<0$ y $f(1)=\frac{1}{2}>0$, por el Teorema de los Valores Intermedios, habrá algún punto en $(0,1)$ donde la función se anule, es decir, se tiene la igualdad pedida.

Problema 1.2.7 Sea $f(x)=\cos x-2x+1$. Como $f(0)=2>0$ y $f(\pi/2)=1-\pi<0$, por el Teorema de los Valores Intermedios, habrá algún punto en $(0,\pi/2)$ donde la función se anule, es decir, se tiene la igualdad pedida.



1.3. Derivabilidad

Problema 1.3.1

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

Problema 1.3.2 *i)* $f'(x)=2x-5\operatorname{sen}x$; *ii)* $f'(x)=\cos x-x\operatorname{sen}x$; *iii)* $f'(x)=\frac{-x\operatorname{sen}x-\cos x}{x^2}$; *iv)* $f'(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$; *v)* $f'(x)=-\operatorname{sen}(x^2)2x$; *vi)* $f'(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x}$; *vii)* $f'(x)=(1+\operatorname{tg}^2(e^{x^2}))e^{x^2}2x$; *viii)* $f'(x)=e^{\operatorname{sen}x+\cos^2 x}(\cos x-2\cos x\operatorname{sen}x)$; *ix)* $f'(x)=2\operatorname{sen}(x^2+1)\cos(x^2+1)2x$; *x)* $f'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$; *xi)* $f'(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+1}$; *xii)* $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cos x-\sqrt{x^2+1}\operatorname{sen}x$.

Problema 1.3.3 Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, la función no es continua en $x = 0$. Por tanto tampoco puede ser derivable en ese punto.

Problema 1.3.4 Para $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ se tiene $f(0) = 1/2$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, $f'(0) = 1/4$. Por tanto la recta tangente es $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(x-0)$.

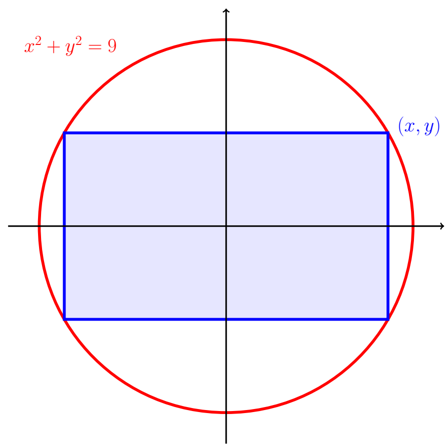
Problema 1.3.5 Como $f(0) = 2$, $f'(x) = 2e^x$, $f'(0) = 2$, la recta tangente es $y = 2 + 2(x-0)$.

Problema 1.3.6 *i)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$; *ii)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{2x} = 0$; *iii)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$; *iv)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$; *v)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3}, = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$; *vi)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-7x}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-7}{3x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{6x} = 0$; *vii)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$; *viii)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = \infty$.

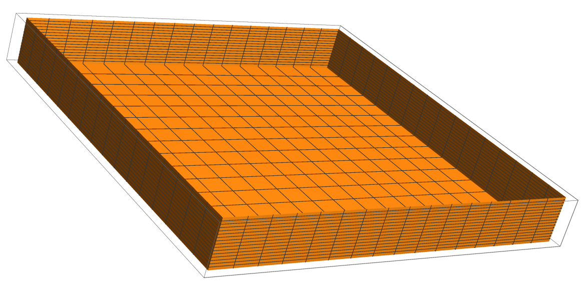
Problema 1.3.7 Prob.1.2.1 $\rightsquigarrow$ *iv)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{3x^2-2x-1} = \infty$; *vi)* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1/2\sqrt{x}}{1} = \dfrac{1}{4}$; *vii)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x/\sqrt{1-x^2}}{2x} = \dfrac{1}{2}$; *viii)* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$; *ix)* $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1}} = e^1 = e$; *x)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$.
Prob.1.2.2 $\rightsquigarrow$ *i)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+5x-1}{7x^2+x+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+5}{14x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$; *v)* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1$.

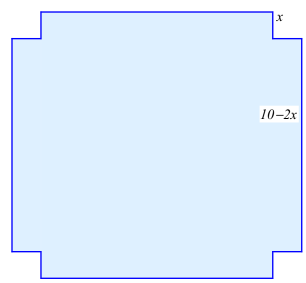
Problema 1.3.8 *i)* $f'(x) = 2x(x^2+3) + (x^2-1)2x = 2x(2x^2+2) = 0 \rightsquigarrow x = 0$, $f(0) = -3$, $f(-2) = 7$, $f(2) = 4$, luego $x = 0$ es mínimo, $x = \pm 2$ son máximos. *ii)* $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1$, $f(1) = 1/2$, $f(-1) = -1/2$, $f(-2) = -2/5$, $f(3) = 3/10$, luego $x = -1$ es mínimo, $x = 1$ es máximo. *iii)* $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x \leq -1, \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > -1, \\ -1 & \text{si } x < -1, \end{cases}$ $f \neq 0$, pero no existe $f'(-1)$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = 1$, $f(1) = 2$, luego $x = -1$ es mínimo, $x = 1$ es máximo.

Problema 1.3.9 Dado un punto del primer cuadrante (x, y), consideramos el rectángulo de vértices $(\pm x, \pm y)$; sus lados tienen entonces longitud $2x$, $2y$, y por tanto el área es $A(x) = 4xy$; para que esté inscrito en el círculo de radio 3 se debe tener $x^2 + y^2 = 9$, por lo que $y = \sqrt{9-x^2}$. Así tenemos que maximizar la función $A(x) = 4x\sqrt{9-x^2}$ para $x \in [0, 3]$. Derivando, $A'(x) = \dfrac{4(9-2x^2)}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \rightsquigarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Como $A(3/\sqrt{2}) = 18$, $A(0) = 0$, $A(3) = 0$, el máximo es $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Como $y = \sqrt{9-(3/\sqrt{2})^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, tenemos un cuadrado de lado $\ell = 2x = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

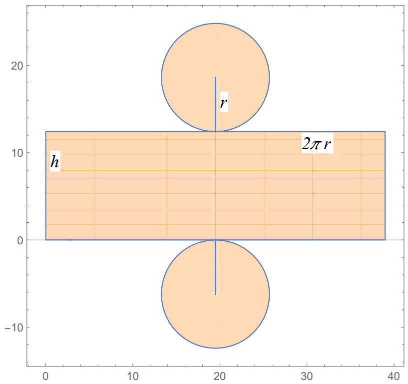


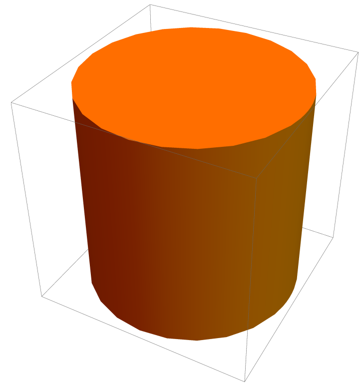
Problema 1.3.10 La caja tendrá una base cuadrada de lado $10-2x$ y altura x; el volumen es $V(x)=x(10-2x)^2$, con $x\in[0,5]$. $V'(x)=(10-2x)^2-4x(10-2x)=(10-2x)(10-6x)=0 \rightsquigarrow x=5$ o $x=5/3$. Como $V(5)=0$, $V(5/3)=\dfrac{2000}{27}$, $V(0)=0$, el máximo es $x=5/3$.



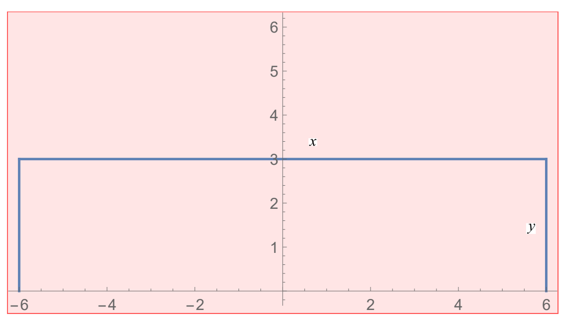


Problema 1.3.11 Si r es el radio de la base y h es la altura, el volumen es $V=\pi r^2 h$ fijo igual a 1500, luego $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. El área lateral es $A_1=2\pi r h$, y el área de cada tapa es $A_{2,3}=\pi r^2$. El área total es $A=2\pi r h+2\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+2\pi r^2$, $r\in(0,\infty)$. La derivada es $A'(r)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}=0 \rightsquigarrow r=\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{1/3}\sim 6{,}2cm$. Como $\lim\limits_{r\to 0^+}A(r)=\infty$, $\lim\limits_{r\to\infty}A(r)=\infty$, el mínimo se alcanza en el punto calculado. La altura es $h=\dfrac{V}{\pi(V/2\pi)^{2/3}}=\left(\dfrac{4V}{\pi}\right)^{1/3}=2r\sim 12{,}4cm$.

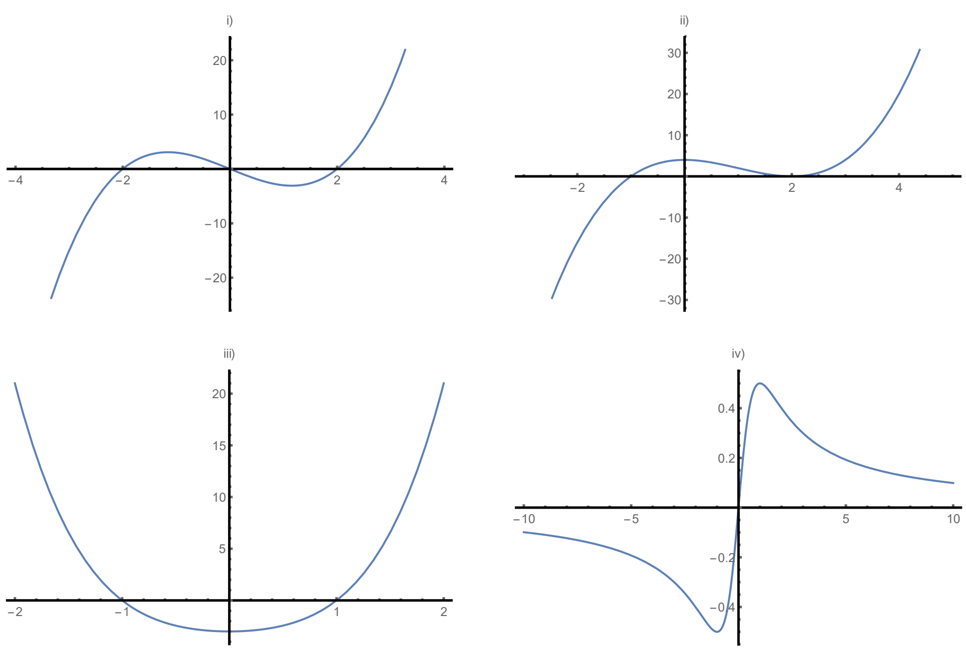


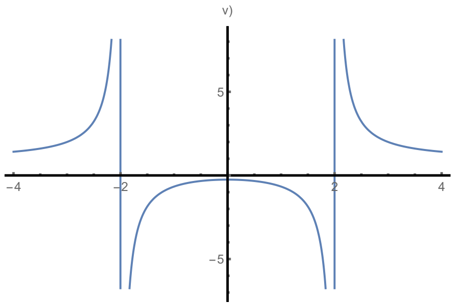


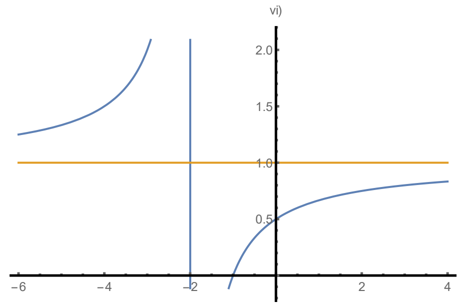
Problema 1.3.12 Si x es la longitud de la parte de finca pegada al río, e y es la longitud del lado perpendicular, el perímetro será $p = x + 2y$; el área es $xy = 180000$, por tanto $y = \dfrac{180000}{x}$. Tenemos que minimizar $p(x) = x + \dfrac{360000}{x}$, con $x \in (0, \infty)$. La derivada es $p'(x) = 1 - \dfrac{360000}{x^2} = 0 \rightsquigarrow x = 600$. Como $\lim\limits_{x \to 0^+} p(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$, el mínimo se alcanza en el punto calculado. Como $y = \dfrac{180000}{600} = 300$, la finca es rectangular de lados $300m$ y $600m$.

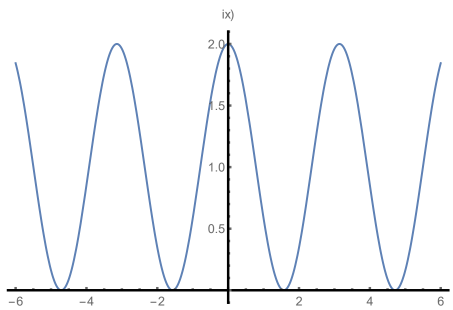


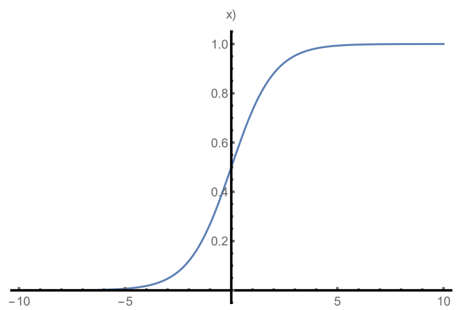
Problema 1.3.13











– $\mathcal{A}_{\delta}$P–

– $\mathcal{ERC}$–