uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Resolución problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 3

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

3. Álgebra lineal

3.1. Sistemas lineales de ecuaciones

Problema 3.1.1 *i*) Sumando las dos ecuaciones, $2x = 4$, de donde $x = 2$, $y = 5 - 2 = 3$.
ii) Despejando en la primera ecuación $y = 7 - 2x$, sustituido en la segunda, $3x - 14 + 4x = 0$, da $x = 2$, $y = 3$. *iii*) $x = \dfrac{6y+9}{5} \rightsquigarrow \dfrac{9}{5}(6y+9) + 8y = 35 \rightsquigarrow y = 1 \rightsquigarrow x = 3$.

Problema 3.1.2

$$\begin{cases} ab = 1200 \\ a/b = 1/3 \end{cases} \rightsquigarrow b = 3a \rightsquigarrow 3a^2 = 1200 \rightsquigarrow a = 20 \rightsquigarrow b = 60.$$

Obsérvese que no se trata de un sistema lineal.

Problema 3.1.3 Si denotamos por E el número de paquetes de leche entera y por S el de semidesnatada, tenemos el sistema

$$\begin{cases} E + S = 9 \\ 1{,}15E + 0{,}90S = 9{,}60 \end{cases} \rightsquigarrow E = 6,\ S = 3.$$

Problema 3.1.4 Si denotamos por p la edad del padre y por h la del hermano, tenemos el sistema

$$\begin{cases} p - 5 = 3(h - 5) \\ p + 5 = 2(h + 5) \end{cases} \rightsquigarrow p = 35,\ h = 15.$$

Problema 3.1.5 Si denotamos por x e y el salario diario de cada obrero, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = y - 10 \\ 30x = 24y + 660 \end{cases} \rightsquigarrow x = 150,\ y = 160.$$

Problema 3.1.6 *vi*) Sistema Incompatible, *ii*), *iii*) y *v*) Sistema Compatible Indeterminado, el resto Sistema Compatible Determinado. *i*) $x = y = z = 1$; *ii*) $x = 1$, $y = 2 - z$, $z \in \mathbb{R}$; *iii*) $x = 3$, $y = -z - 2$, $z \in \mathbb{R}$; *iv*) $x = 3/2$, $y = 3/2$, $z = -3$; *v*) $x = \dfrac{z+5}{3}$, $y = \dfrac{5z+1}{3}$, $z \in \mathbb{R}$.

Problema 3.1.7 Si denotamos por m la edad de la madre y por p y q la de los hijos, tenemos el sistema

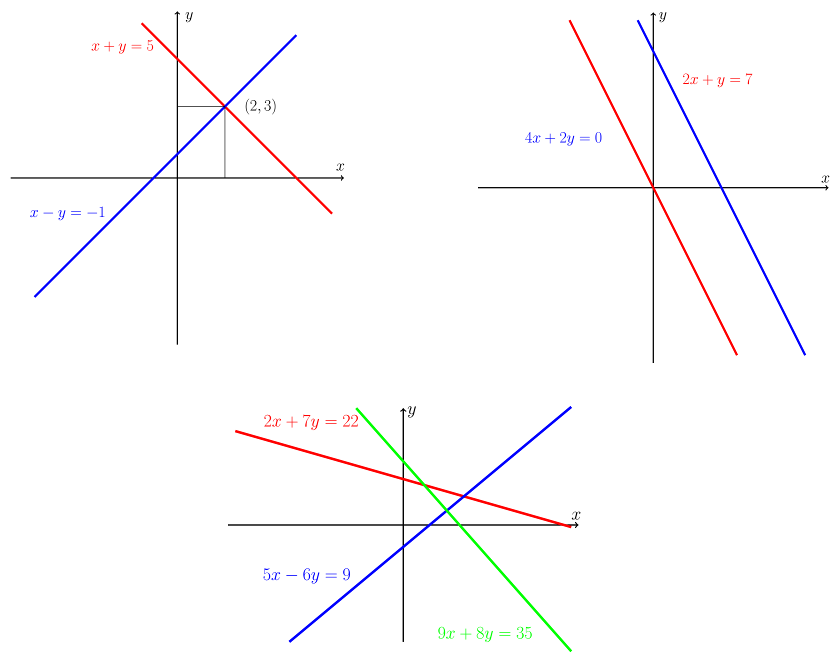
$$\begin{cases} m - 14 = 5(p + q - 28) \\ m + 10 = p + q + 20 \\ q + m - p = 42 \end{cases} \rightsquigarrow m = 44,\ p = 18,\ q = 16.$$

Problema 3.1.8 Si denotamos por x, y, z los precios de los distintos tipos de billete, tenemos el sistema

$$\begin{cases} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{cases} \rightsquigarrow x = 300,\ y = 400,\ z = 500.$$

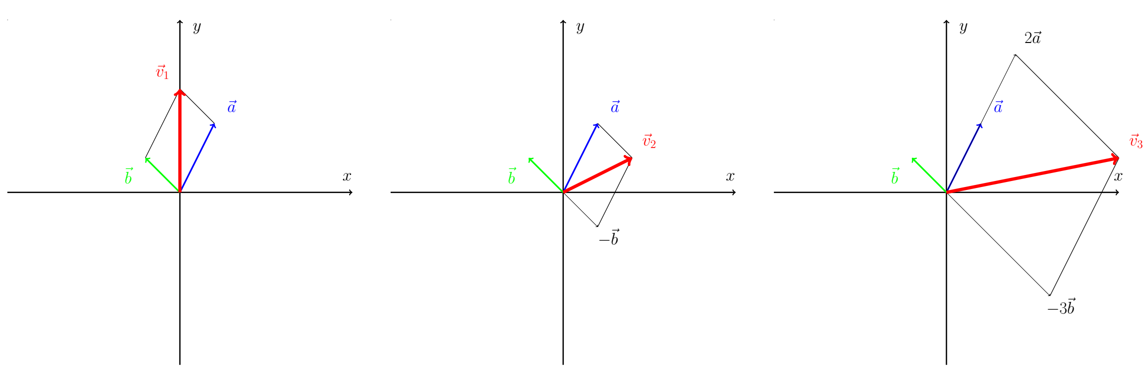
Conviene simplificar previamente el sistema dividiendo por 10.

Problema 3.1.9 *i*) Se cortan en el punto $(2,3)$; *ii*) son paralelas; *iii*) se cortan dos a dos, no tienen intersección común.



3.2. Vectores y matrices

Problema 3.2.1 $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b} = (0,3)$, $\vec{v}_2 = \vec{a} - \vec{b} = (2,1)$, $\vec{v}_3 = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (5,1)$.



Problema 3.2.2 Basta estudiar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es 0, son linealmente dependientes; como el primero no es múltiplo del segundo, el rango es 2. La combinación lineal es fácil,

$$(1,1,-1) = (2,1,0) - (1,0,1).$$

Problema 3.2.3 Poniendo $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = -2 \\ \alpha - \beta = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \alpha = 3,\ \beta = -2.$$

Problema 3.2.4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.5

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -1.$$

Problema 3.2.6 La condición $A^T = A^{-1}$ es equivalente a $AA^T = I$, que es más fácil de calcular:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ -4/5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 4/5 \\ -4/5 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 16/25 & 0 \\ 0 & a^2 + 16/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $a = \pm\dfrac{3}{5}$.

Problema 3.2.7

$$i) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad ii) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.8

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.9

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (B|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (I|B^{-1}). \end{aligned}$$

Por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (C|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 3 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/4 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \\ &= (I|C^{-1}). \end{aligned}$$

Por tanto $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/4 & 5/12 \\ 1/6 & 1/4 & -1/12 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Problema 3.2.10 Para que AB tenga las dimensiones de C es necesario que A tenga 3 filas y 2 columnas. Poniendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, e igualando el producto, tenemos un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Pero es un sistema desacoplado, en realidad son 3 sistemas 2×2 fáciles:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 11 \\ -a - 2b = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2c + 3d = 5 \\ -c - 2d = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2e + 3f = 1 \\ -e - 2f = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 2$, $f = -1$. La matriz pedida es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3.2.11 *i)* $D = 8 - 1 = 7$; *ii)* $D = -2 - a$; *iii)* $D = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$; *iv)* $D = 24 - 4 - 8 - 2 = 10$; *v)* $D = 40 - 28 = 12$; *vi)* $D = 3 - a^2 + a - a = 3 - a^2$.

Problema 3.2.12 *i*) Restando columnas

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & x+5 & x+9 \\ x+3 & x+5 & x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x+1 & 4 & 8 \\ x+3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera columna es el doble que la segunda.
ii) Sumando columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera columna es un múltiplo de la primera.

Problema 3.2.13 *i*) El rango es trivialmente 2 pues los vectores fila no son uno un múltiplo del otro. Para los otros dos casos hacemos ceros.
ii)

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

iii)

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} = 3.$$

Problema 3.2.14 En el primer caso es claro que el rango es 1 si $a = -2$ y es 2 si $a \neq -2$. Para el segundo caso,

$$\begin{aligned} r(B) &= r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & -a & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 5 & -a-3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 0 & -a+2 & 11-5a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango es siempre 3, pues es imposible tener a la vez $-a+2=0$ y $11-5a=0$.

Problema 3.2.15

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{vmatrix} = -2k^2 + 4k + 8 = 0 \rightsquigarrow k = 1 \pm \sqrt{5},$$

es decir, la matriz no tiene inversa para esos valores de k.

Problema 3.2.16 *a*) $|A| = 5 - a^2 = 0 \rightsquigarrow a = \pm\sqrt{5}$, no existe la inversa para esos valores. *b*) Para $a = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ que es simétrica, es decir, $A = A^T$. Por tanto $B = (A^{-1}A^T)^2 = I^2 = I$. *c*) Como A es simétrica,

$$AX - A^2 = A^T \rightsquigarrow AX - A^2 = A \rightsquigarrow A(X-A) = A \rightsquigarrow X - A = I,$$

es decir

$$X = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.3. Resolución matricial de sistemas lineales

Problema 3.3.1 Estudiamos el sistema en forma matricial atendiendo al rango de la matriz A y la matriz ampliada $A^* = (A|B)$

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

Se tiene $r(A) = r(A^*) = 3$, el sistema es Compatible Determinado, solución $z = 17/4$, $y = 7/4$, $x = 1/4$.

Problema 3.3.2 Operando las matrices el sistema es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{array}\right)$$

Se tiene $r(A) = r(A^*) = 3$, es SCD, solución $z = 7$, $y = 8/5$, $x = 32/5$.

Problema 3.3.3 *a*)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

La igualdad se verifica si $a = 0$ y $b = 2$. *b*) Como $A^2 = A$ se debe tener $(1 + c)A + dI = O$, que es imposible, no hay valores de c y d. *c*) El sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Problema 3.3.4 *a*)

$$M = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 4$$
$$N = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}(2 \quad 1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Como $|P| = -1/3$, se tiene

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$X = P^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.5 *i)*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 3.$$

ii)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-7} = 3.$$

iii)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 35 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}} = 3, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 35 \end{vmatrix}}{94} = 1.$$

i)′

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{6} = 1, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{6} = 1$$

iv)′

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{8} = -3.$$

Los sistemas *ii)*, *iii)*, *v)* y *vi)* no tienen solución o no tienen solución única (el determinante del sistema se anula).

Problema 3.3.6 Estudiamos el rango de la matriz A y de la matriz ampliada $A^* = (A|B)$,

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1+a & 2-a \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \end{array}\right)$$

Se tiene

$$\begin{array}{l} a \neq 2 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A^*) = 3 \;\Rightarrow\; SCD \\ a = 2 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A^*) = 2 \;\Rightarrow\; SCI \end{array}$$

Para $a = 2$ la solución es $y = z$, $x = 1 - z$, $z \in \mathbb{R}$.
De otra manera: calculamos primero el determinante, $|A| = 3a - 6$, que se anula para $a = 2$. Por tanto para $a \neq 2$ es SCD, y para $a = 2$ lo estudiamos por separado.

Problema 3.3.7

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a-1 & 2-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a^2 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & \frac{1-a^2}{2} & \frac{-a^2-3a+10}{2} \end{array}\right)$$

Se tiene

$$\begin{array}{l} a \neq \pm 1 \Rightarrow r(A) = r(A^*) = 3 \Rightarrow SCD \\ a = 1 \Rightarrow r(A) = 2 < r(A^*) = 3 \Rightarrow SI \\ a = -1 \Rightarrow r(A) = 2 < r(A^*) = 3 \Rightarrow SI \end{array}$$

De otra manera: $|A| = a^2 - 1$, que se anula para $a = \pm 1$. Por tanto para $a \neq \pm 1$ es SCD, y para $a = \pm 1$ lo estudiamos por separado.

Problema 3.3.8 *a*) Estudiamos el determinante; al aparecer tantas veces el parámetro el cálculo del rango se hace más difícil. $|A| = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$, que se anula solo para $\lambda = 0$. Por tanto para $\lambda \neq 0$ es SCD. Para $\lambda = 0$ el sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 0 \\ z = 1 \\ -y = 0 \end{array}\right.$$

que claramente es incompatible.
b) El sistema nunca tiene infinitas soluciones. *c*) Cuando $\lambda = 3$ el sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y + z = 3 \\ 3y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \end{array}\right.$$

que matricialmente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

que da $z = 1/4$, $y = 1/4$, $x = 5/6$.

Problema 3.3.9 El determinante es $|A| = k^2 - 3k + 2$, que se anula para $k = 1$ y $k = 2$. Por tanto para $k \neq 1, 2$ es SCD. Para $k = 1$ el sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

que es SCI pues las dos primeras ecuaciones son iguales. De otra manera

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = 2$$

Para $k = 2$ es

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 2y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

y se tiene

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

por lo que $r(A) = 2 < r(A^*) = 3$ y es SI.

Problema 3.3.10 $|A| = a$. Por tanto si $a \neq 0$ es SCD. En el caso $a = 0$ se tiene

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & b \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & b-4 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\begin{array}{l} b \neq 2 \;\Rightarrow\; r(A) = 2 < r(A^*) = 3 \;\Rightarrow\; SI \\ b = 2 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A^*) = 2 \;\Rightarrow\; SCI \end{array}$$

En el caso $a = -1$, $b = 1$ es

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

que da $z = 1$, $y = 0$, $x = 1$.

Problema 3.3.11

$$r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & -8 & 2 & -14 & \alpha-15 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 3/4 & -5/4 & -2 \end{array}\right)$$

Se obtiene

$$\begin{array}{l} \alpha = 1 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A^*) = 3 \;\Rightarrow\; SCI \\ \alpha \neq 1 \;\Rightarrow\; r(A) = 3 < r(A^*) = 4 \;\Rightarrow\; SI \end{array}$$

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–