uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS II. Resolución problemas

Curso preparatorio para el acceso a la universidad para mayores de 25 años

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

4. Geometría

4.1. El plano $\mathbb{R}^2$ y el espacio $\mathbb{R}^3$

Problema 4.1.1

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|(3,-1,2)\| = \sqrt{14}$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2-6-12 = -20$, $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1,-2,-1)$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{-20}{\sqrt{406}}$ (el ángulo es obtuso).

d) Por ejemplo $\vec{w} = (0,2,1)$.

e) Si $\vec{w} = (\alpha,\beta,\gamma)$ se debe tener $\begin{cases} \alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -2\alpha + 3\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$ Una solución es $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 2$. Como el vector tiene que ser de norma uno dividimos por su norma, y el vector buscado es $\vec{w} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

f) $r(\vec{u},\vec{w},\overrightarrow{AB}) = r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$, haciendo ceros o calculando el determinante, que es $-3 \neq 0$.

Problema 4.1.2 $\vec{a}\cdot\vec{b} = x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = -10$.

Problema 4.1.3

a) $\begin{cases} -2\alpha + 4 + 12 = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\; \alpha = 8,\ \beta = 2.$

b) $\cos\theta = \dfrac{2+4+3}{\sqrt{17}\sqrt{6}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$ (ángulo agudo).

Problema 4.1.4 La pendiente debe ser -1. Pasando por P la recta es $y = \dfrac{1}{2} - (x-2)$, es decir, $y = -x + \dfrac{3}{2}$.

Problema 4.1.5 $dis(P,r) = \dfrac{|6+1-6|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Problema 4.1.6 Escribimos la ecuación normal de la recta, $x + y = 0$, y así la distancia es $dis(P,r) = \dfrac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Problema 4.1.7

a) $dis(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{5}$.

b) $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{50}}$.

c) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$.

d) Tomamos vector director $\vec{v} = (1, -3)$. La recta es entonces $x - 3y = 1$.

e) $dis(Q, r_2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Problema 4.1.8 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z - 2$.

Problema 4.1.9

a) Como $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 3, 1)$, la recta es $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = z + 1$.

b) Como $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 3)$, la recta es $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 3\lambda. \end{cases}$

c) Como la dirección del vector $3\vec{v}$ es la misma que la del vector $\vec{v}$, la recta es $x = 1 - y = 2 - z$.

Problema 4.1.10 El vector de la recta será $\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, 4, 4)$. Tomamos para simplificar el vector $(1, 2, 2)$. La recta es $x - 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

Problema 4.1.11 No son coplanarios pues son linealmente independientes, el rango es 3, el determinante de la matriz es $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$.

Problema 4.1.12 Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (\alpha, \alpha - 1, 1)$ y vemos si son linealmente independientes mediante el determinante, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ \alpha & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - \alpha$.
Para $\alpha = 4$ son coplanarios los cuatro puntos.

Problema 4.1.13 $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = 2 + \lambda + \mu. \end{cases}$

Problema 4.1.14 $(x - 1) + 2y + 3(z - 1) = 0$, es decir, $x + 2y + 3z = 4$.

Problema 4.1.15

a) Hallamos los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-2, -4, -6)$, $\overrightarrow{PR} = (-1, -1, -4)$. La ecuación del plano (tomando múltiplos simples de esos vectores) es $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 3 + 3\lambda + 4\mu. \end{cases}$

b) El plano tendrá de vectores $\overrightarrow{PR} = (-1,-1,-4)$ y $\vec{u}-\vec{v} = (-5,0,-3)$, luego es $\begin{cases} x = 1-5\lambda+\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3-3\lambda+4\mu. \end{cases}$

c) Como $\vec{u}+2\vec{v} = (10,3,3)$, $2\vec{u}+\vec{v} = (5,3,0)$, la ecuación del plano es $\begin{cases} x = 10\lambda+5\mu \\ y = 1+3\lambda+3\mu \\ z = -1+3\lambda. \end{cases}$

Problema 4.1.16

a) Si la recta es paralela a π_1 y π_2, tendrá de vector el producto vectorial de los vectores directores de estos planos. El vector de π_1 es $\vec{v_1} = (3,0,-1)$. El vector de π_2 es el producto vectorial de $\overrightarrow{OP} = (1,0,1)$ y $\overrightarrow{OQ} = (0,2,1)$, es decir $\vec{v_2} = (-2,-1,2)$. Así el vector de la recta es $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (-1,-4,-3)$. La ecuación de la recta es $x = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{3}$.

b) Dos vectores del plano serán el de la recta $\vec{w_1} = (1,2,1)$ además de $\vec{w_2} = \overrightarrow{RQ} = (-1,-1,1)$.

La ecuación del plano es entonces $\begin{cases} x = \lambda-\mu \\ y = 2+2\lambda-\mu \\ z = 1+\lambda+\mu. \end{cases}$

c) Escribimos la recta en forma normal, $x = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+5}{6}$. Tenemos entonces un punto del plano $S = (2,1,1)$, un vector del plano $\vec{u_1} = (1,3,6)$, y el otro se obtiene con un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $A = (0,-3,-5)$; así $\vec{u_2} = \overrightarrow{SA} = (-2,-4,-6)$. La ecuación del plano es $\begin{cases} x = 2+\lambda+\mu \\ y = 1+3\lambda+2\mu \\ z = 1+6\lambda+3\mu. \end{cases}$

Problema 4.1.17 $dis(P,\pi) = \dfrac{|2+3-1|}{\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

Problema 4.1.18 Basta calcular la distancia de un punto cualquiera de π_1, por ejemplo $P = (0,0,-5)$, a π_2, $dis(\pi_1,\pi_2) = dis(P,\pi_2) = \dfrac{26}{\sqrt{14}}$.

Problema 4.1.19 Vemos que el vector de la recta coincide con uno de los vectores del plano. Basta calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $P = (2,5,1)$, al plano. Pero primero hay que escribir la ecuación continua del plano, $11x+13y-15z-9 = 0$. Finalmente $dis(r,\pi) = dis(P,\pi) = \dfrac{63}{\sqrt{515}}$.

Problema 4.1.20

a) $\overrightarrow{PQ} = (0,0,-1)$, $\overrightarrow{QR} = (1,3,-3)$, $dis(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = 1$, $dis(Q,R) = \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{19}$.

b) $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (3,-1,1)\cdot(1,2,-1) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ (son perpendiculares).

c) $z = -2$.

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 + \lambda. \end{cases}$

e) $x - 4y - 7z + 6 = 0.$

Problema 4.1.21 $d(P, r) = \|\overrightarrow{RP}\| \cdot |\operatorname{sen}\alpha| = \dfrac{\|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

Problema 4.1.22 Construimos el plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra y calculamos la distancia del plano a cualquier punto de esa otra recta.
i) $\pi \equiv x + 3z + 8 = 0$, $d(r_1, r_2) = d((7, -5, 2), \pi) = \dfrac{21}{\sqrt{10}}.$
ii) Resolvemos el sistema para obtener la ecuación paramétrica de la segunda recta:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{7} + \frac{\lambda}{7} \\ y = -\frac{2}{7} + \frac{\lambda}{7} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallamos ahora el plano que contiene a la primera y es paralelo a la segunda recta y la distancia entre ese plano y un punto de la segunda recta:

$$\pi \equiv 7x + 14y - 3z - 6 = 0, \qquad d(r_1, r_2) = d\left((-3/7, -2/7, 0), \pi\right) = \frac{13}{\sqrt{254}}.$$

4.2. Posición relativa de rectas y planos

Problema 4.2.1 Se debe tener $\dfrac{-6}{9} = \dfrac{\alpha}{-3} = \dfrac{-4}{\beta}$, es decir, $\alpha = 2$, $\beta = 6$.

Problema 4.2.2 Como los vectores $(1, 1, -1)$ y $(3, -1, -3)$ son lineralmente independientes, los planos se cortan a lo largo de una recta, que se calcula fácilmente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

es decir, $y = 1/2$, $x = 2 - y + z = 3/2 + z$. La recta es, $\begin{cases} x = 3/2 + \lambda \\ y = 1/2 \\ z = \lambda. \end{cases}$

Problema 4.2.3 *i)*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

implica $y = \dfrac{2 + 5z}{4}$, $x = \dfrac{6 + z}{4}$, es decir $\begin{cases} x = 3/2 + \lambda \\ y = 1/2 + 5\lambda \\ z = 4\lambda. \end{cases}$
ii) Primero escribimos los planos en forma continua, $x - 2y - z = 0$, $4x - y - z = -1$. Así resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

que implica $y = \dfrac{-1-3z}{7}$, $x = \dfrac{-2+z}{7}$, es decir $\begin{cases} x = -27+\lambda \\ y = -1/7/2 - 3\lambda \\ z = 7\lambda. \end{cases}$

iii) De la ecuación en forma continua de los planos, $x - 6y + 3z = -1$, $7x - 6y + 3z = 5$, obtenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 36 & -18 & 12 \end{array}\right),$$

que implica $y = \dfrac{2+3z}{6}$, $x = 1$, es decir $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1/3 + \lambda \\ z = 2\lambda. \end{cases}$

Problema 4.2.4 Los vectores no son perpendiculares $(3,2,1)\cdot(3,-2,1) = 6 \neq 0$, por lo que la recta y el plano no son paralelos, se cortan en un punto. Sustituimos la recta $\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$ en el plano, $3 + 9\lambda - 4\lambda + 4 + \lambda = 3$, que da $\lambda = -2/3$, es decir el punto $(-1, -\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.

Problema 4.2.5

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & -15 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

Luego $r(A) = r(A^*) = 2$, SCI, se cortan en una recta.

Problema 4.2.6

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -k & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & -1-k & -k-1 & 2 \\ 0 & 3-2k & -1 & 1 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & -1-k & -k-1 & 2 \\ 0 & 3-2k & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante $\begin{vmatrix} -1-k & -k-1 \\ 3-2k & -1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2$, que se anula para $k = -1$, $k = 2$. Por tanto si $k \neq 1, 2$ el sistema es SCD, y los planos se cortan en un punto. Si $k = -1$ la matriz es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

que es SI, no hay intersección común. Si $k = 2$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

que también es incompatible.

Problema 4.2.7 Escribimos el sistema de dos pares de ecuaciones

$$\begin{matrix} \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{5} \\ \dfrac{y+2}{5} = z-4 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x+2 = \dfrac{y-7}{2} \\ \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z+5}{2} \end{cases} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 5x-5 = 2y+4 \\ y+2 = 5z-20 \\ 2x+4 = y-7 \\ y-7 = z+5 \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuaciones se obtiene $x = 31$, $y = 73$. De la segunda y cuarta $y = 16$, $z = 4$. Obviamente es incompatible, no hay intersección común y las rectas se cruzan. Resolviendo el sistema completo se obtiene el mismo resultado

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 2 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 12 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 0 & -1/5 & 0 & 37/5 \\ 0 & 1 & -1 & 12 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 44 \end{array}\right)$$

luego $r(A) = 3$, $r(A^*) = 4$, sistema incompatible.

Problema 4.2.8 Sustituyendo las ecuaciones de la primera recta en la segunda se obtiene

$$\frac{2\lambda-2}{2} = 3+4\lambda = \frac{5\lambda-1}{3}$$

La primera igualdad da $\lambda = -4/3$, mientras que la segunda da $\lambda = -10/3$, que es incompatible, luego las dos rectas se cruzan.

Problema 4.2.9 Sustituyendo las ecuaciones de la primera recta en la segunda se obtiene

$$\frac{x+1}{\beta} = \frac{x-1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

que implica $(\beta-2)x = \beta+2$. Si $\beta \neq 2$ se tiene que las rectas se cortan en el punto $(\frac{\beta+2}{\beta-2}, \frac{\beta+2}{\beta-2}, \frac{\beta+2}{\beta-2})$. Si $\beta = 2$ las rectas no se cortan, de hecho son paralelas.

4.3. Áreas y volúmenes

Problema 4.3.1 Área $= \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

Problema 4.3.2 Utilizamos el producto mixto: Volumen $= \dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \dfrac{25}{6}$.

Problema 4.3.3 La medida de la arista es la distancia entre los planos, que calculamos como la distancia de un punto del primer plano, $P = (0, 0, 1)$, al otro:

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}.$$

Por tanto Volumen $= \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$.

Problema 4.3.4 El punto que falta tiene la forma $D = (1-\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$. Los vectores que generan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,0), \quad \overrightarrow{AC} = (3,0,0), \quad \overrightarrow{AD} = (1+\lambda, -1-\lambda, -3-\lambda).$$

El volumen lo calculamos por el producto mixto:

$$\text{Volumen } = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{3(3+\lambda)}{2}.$$

Para que valga 6 debe ser $\lambda = 1$, luego $D = (0,3,4)$.

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–