RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS

Curso **2009–2010**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente sólo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-4/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

Entonces, si $\lambda = 4/3$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq 4/3$ los dos rangos son igual a 3 y el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

b) Tomando $\lambda = 1$ continuamos la resolución del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego la solución en este caso es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Ejercicio 2

a) Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (3, -1, 1)$. La recta tiene ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 3\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in I\!R\,.$$

b) Resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 2 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{y+1}{3} = z - 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 2 \\ x = \dfrac{2y+2}{3} \\ z = \dfrac{y+4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y + 2 - y + \dfrac{y+4}{3} = 2 \\ x = \dfrac{2y+2}{3} \\ z = 1 + \dfrac{y+1}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 0 \\ z = 1. \end{array} \right.$$

Ejercicio 3

a) Calculamos en $x = 0$ los límites laterales y el valor de f:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (a - x^2) = a, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\cos(3x) = 2 = f(0).$$

Entonces, si $a = 2$ la función es continua en $x = 0$.

b) Derivamos para $a = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ -6\,\text{sen}(3x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Calculamos los límites laterales en el punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(-6\,\text{sen}(3x)\big) = 0.$$

Como coinciden y f ya es continua en $x = 0$, la función f es derivable en $x = 0$ si $a = 2$ y su derivada vale $f'(0) = 0$.

Ejercicio 4

a) Calculamos: $f(0) = 2$, $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$, $f'(0) = -1$, luego la recta es:

$$y = f(0) + f'(0)\,(x - 0) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - x.$$

b) Dividimos en primer lugar y descomponemos en fracciones simples:

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(2 + \frac{3}{(x-1)(x+1)}\right) dx = \int \left(2 + \frac{3/2}{x-1} - \frac{3/2}{x+1}\right) dx$$

$$= 2x + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{3}{2}\log|x+1| + C = 2x + \frac{3}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a)

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -5 & 9-\lambda \end{pmatrix}.$$

b) El determinante ha de ser no nulo para que sea invertible la matriz:

$$|A \cdot B^T| = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 8 + 3\lambda = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -\frac{8}{3}.$$

Luego para que sea invertible $A \cdot B^T$ ha de ser $\lambda \neq -\dfrac{8}{3}$.

c) Por el método de Gauss, por ejemplo, obtenemos la inversa cuando $\lambda = 9$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 7 & 1 & -3/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/7 & -3/35 \end{array}\right)$$

Luego la inversa es $(A \cdot B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 1/7 & -3/35 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

a) Un punto del plano es $P(1,-1,0)$ y dos vectores directores son $\overrightarrow{v_1} = (2,2,1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,2,-1)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda - \mu. \end{cases}$$

Calculamos un vector normal al plano para hallar la ecuación general:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4,3,2).$$

La ecuación general del plano es:

$$\pi \equiv (-4,3,2) \cdot (x-1, y+1, z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -4x + 3y + 2z + 7 = 0.$$

b) Resolvemos el sistema formado por las dos rectas:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = z \\ x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Sustituyendo las tres últimas ecuaciones en la primera igualdad:

$$\frac{2+t-1}{2} = \frac{-1+2t+1}{2} \quad \Rightarrow \quad t+1 = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Mientras que al sustituir en la segunda se obtiene:

$$\frac{-1+2t+1}{2} = 3 - t \quad \Rightarrow \quad 4t = 6 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{2}.$$

Esto es incompatible con lo anterior, luego las rectas se cruzan, no se cortan.

Ejercicio 3

a) El denominador se anula en $x = 1$ y en $x = -1$, luego el dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$. Buscamos las asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \infty,$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty,$$

Hay por tanto asíntotas verticales en $x = 1$ y en $x = -1$. Buscamos las horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Hay una asíntota horizontal, para $x \to \pm\infty$, la recta $y = 0$.

b) Calculamos los puntos singulares y estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0$$

Como no se anula no hay puntos singulares. El signo es negativo, luego f es decreciente en cada intervalo de su dominio: en $(-\infty,-1)$, en $(-1,1)$ y en $(1,\infty)$. No tiene extremos la función.

Ejercicio 4

a) Integramos por partes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} du = dx, \\ v = -\cos x \end{array} \right.$$

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

b)

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} \, e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(e^2 - 1 \right).$$