RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS

Curso **2010–2011**

> La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente sólo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Aplicamos el método de Gauss al sistema y obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & \lambda & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda+1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -2 \end{array}\right)$$

Si $\lambda = -1$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq -1$ los dos rangos son iguales a 3, luego el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

b) Sustituimos $\lambda = 1$ y resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

luego la solución es $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$.

Ejercicio 2

a) El plano tiene por vector normal el vector de dirección de la recta, que es $(2, 3, -2)$ y pasa por $\mathrm{P}(2, -1, 1)$:

$$\pi \equiv 2(x-2) + 3(y+1) - 2(z-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi \equiv 2x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

b) Utilizamos la fórmula para hallar la distancia entre un punto y un plano:

$$d((1,0,-1),\pi) = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 0 - 2\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{17}}.$$

Ejercicio 3

a) Utilizamos la fórmula para la recta tangente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

calculamos lo que necesitamos: $f(1) = 2$, $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow f'(1) = 1$. Obtenemos la recta:

$$y = 2 + (x-1) \Longrightarrow y = x + 1.$$

b) Al sustituir obtenemos un límite del tipo 1^∞, luego es del número e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1}} = \mathrm{e}^2.$$

Ejercicio 4

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, luego buscaremos asíntotas en $+\infty$, $-\infty$ y en el punto 3 por ambos lados:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-3} = 2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-3}$$

esto nos da la asíntota horizontal $y=2$ para $x\to\infty$ y para $x\to-\infty$. Como:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3} = \infty,$$

hemos obtenido la asíntota vertical $x=3$, que es asíntota por los dos lados.

b) Integramos por partes, haciendo:

$$\left\{\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \mathrm{e}^{2x}\,dx \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} du = dx, \\ v = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$$

$$\int x\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Calculamos cuándo es cero el determinante de la matriz:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-6a = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = -\frac{1}{6},$$

y en consecuencia, si $a=-1/6$ la matriz no es invertible. Si $a\neq -1/6$ la matriz es invertible.

b) Utilizando el procedimiento de Gauss calculamos su inversa para $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 & -3/2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/7 & -3/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 & -2/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{array}\right)$$

Luego

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -3/7 & 1/7 \\ -1/7 & -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2

a) Calculamos la ecuación continua de la recta eliminando el parámetro:

$$x - 1 = -2 - y \quad \Longrightarrow \quad r \equiv x + y + 1 = 0,$$

y aplicamos la fórmula para hallar la distancia:

$$d((3,2), r) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

b) Podemos elegir cualquier punto como vector de posición de la recta, por ejemplo P$(1, 2, 3)$, y el vector de dirección será un vector normal al plano, que calculamos mediante el producto vectorial:

$$\vec{d} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 3).$$

La ecuación de la recta es

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}.$$

Ejercicio 3

a) La función es continua en $x < 1$ porque es un polinomio y es continua en $x > 1$ porque es una función racional con denominador distinto de cero allí. Para que sea continua también en $x = 1$, los límites laterales han de coincidir con el valor de la función en ese punto:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (k - x^2) = k - 1 = f(1), \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x} = 2,$$

para que coincidan debe tenerse $k - 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad k = 3$. Para ese valor, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Al sustituir directamente x por 0 se obtiene la indeterminación $0/0$, luego podemos aplicar la regla de L'Hôpital para calcularlo, y la aplicamos dos veces porque se vuelve a obtener $0/0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x} + \operatorname{sen}(2x) - 1 - x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\mathrm{e}^{-x} + 2\cos(2x) - 1}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 4\operatorname{sen}(2x)}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 4

a) La función es continua por ser un polinomio y el intervalo cerrado, luego tenemos garantizado que existen el punto máximo y el punto mínimo absolutos de f allí. Pueden estar localizados en los extremos del intervalo, que son los puntos 0 y 3, en los puntos sin derivada, que no hay, o en los puntos con derivada cero, que calculamos:

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \quad x = -2.$$

El punto $x = -2$ no está en el intervalo, luego no lo consideramos. Evaluamos f en los puntos obtenidos y comparamos:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{6}, \quad f(3) = 9 + \frac{9}{2} - 6 + 1 = \frac{17}{2}.$$

Entonces, en el intervalo $[0, 3]$ el punto máximo absoluto de f es $x = 3$.

b) Como la función es positiva en los positivos, el área es la integral siguiente:

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 2x}{x+1}\, dx = \int_0^2 \left(x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \log|x+1| \right]_0^2 = 4 - \log 3.$$