RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
MATEMÁTICAS
Curso **2011–2012**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente sólo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \end{array}\right)$$

Luego si $\lambda = 3$ el rango de la matriz del sistema y el de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado. Si $\lambda \neq 3$ el sistema es compatible determinado porque ambos rangos son 3.

b) Sustituímos $\lambda = 2$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

y la solución es $x = 0$, $y = -2$, $z = 0$.

Ejercicio 2

a) El vector dirección de la recta es el vector perpendicular al plano, es decir: $(2, -1, 1)$. La recta r es:

$$r: \quad \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

b) Calculamos:

$$(2, -1, 1) \cdot (x - 3, y + 1, z - 2) = 2(x - 3) - (y + 1) + (z - 2) = 2x - y + z - 9.$$

La ecuación es: $2x - y + z - 9 = 0$.

Ejercicio 3

a) Buscamos asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1\,,$$

luego $y = 1$ es asíntota horizontal para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. Como el denominador se anula en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ buscamos allí asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty\,,$$

luego tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$.

b) Calculamos dónde se anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

El punto $x = 0$ es un punto crítico. Además tenemos que $f' > 0$ en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 0)$, luego allí f es creciente, mientras que $f' < 0$ en $(0, 1) \bigcup (1, \infty)$, donde f es decreciente. Deducimos que $x = 0$ es un punto máximo local de f. No hay máximos ni mínimos absolutos.

Ejercicio 4

a)

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x}\, dx = 2 \int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = 2 \log |x^2+x| + C.$$

b) Integramos por partes: $u = x, \quad dv = \mathrm{e}^{2x}\, dx \quad \Longrightarrow \quad du = dx, \quad v = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x}$.

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\, dx = \left[x\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x}\, dx = \left[x\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\, (\mathrm{e}^2 - 1) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Multiplicamos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de AB como mucho es 2 porque sólo tiene 2 columnas. Como no son una múltiplo de la otra, son linealmente independientes, luego el rango es 2.

b) Para que no tenga inversa su determinante ha de ser cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, para que no haya inversa debe ser $k = -\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 2

a) Calculamos:

$$dist(\pi, P) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{9}} = 1.$$

b) Los vectores de dirección de las dos rectas son los vectores de dirección del plano, que tiene ecuación paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + 3\lambda + 2\mu \\ y & = & 1 - \lambda + \mu \\ z & = & \lambda + 3\mu \end{array} \right. .$$

Ejercicio 3

a) La recta tangente tiene ecuación:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

donde $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 = 1$, y derivamos para calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

La recta es entonces: $y = 1$.

b) El numerador y el denominador tienden a cero cuando x tiende a cero, luego aplicamos la regla de L'Hôpital. Lo mismo vuelve a ocurrir en lo que obtenemos y la volvemos a aplicar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Ejercicio 4 Calculamos dónde se cortan las curvas:

$$x^2 = 2x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0, x = 2.$$

Entre esas abscisas está por encima la función $g(x)$ porque, por ejemplo, $f(1) = 1$ mientras que $g(1) = 2$. Entonces, el área encerrada por esas dos curvas es:

$$\text{Área } = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\,.$$