RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
MATEMÁTICAS
Curso **2012–2013**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente sólo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & \lambda & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Entonces, si $\lambda = -\frac{4}{3}$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq -\frac{4}{3}$ el sistema es compatible determinado porque ambos rangos son 3.

b) Sustituímos $\lambda = -1$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y la solución es $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$.

Ejercicio 2

a) El vector normal al plano pedido es el mismo vector normal del plano dado, es decir: $(1, 2, -3)$. El plano pedido es:

$$(1, 2, -3) \cdot (x - 1, y + 1, z) = 0 \iff x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

b) Al ser paralelos, la distancia es la distancia de un punto de un plano, por ejemplo, P, al otro plano (el que nos dan)

$$\text{dist } (\pi, P) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}\,.$$

Ejercicio 3

a) Es continua en toda la recta real salvo donde se anula el denominador, porque es cociente de polinomios.

$$x^2 - 1 = 0 \quad \iff \quad x = 1,\ x = -1.$$

Luego es continua en toda la recta salvo en $x = 1$ y en $x = -1$.

b) Calculamos la derivada y si se anula en algún punto:

$$f'(x) = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \iff -1 - x^2 = 0 \quad \text{Imposible}\,.$$

No se anula nunca, luego no hay puntos críticos. El signo que tiene es siempre negativo porque el numerador es siempre negativo y el denominador siempre positivo, luego la función es decreciente en cada intervalo, es decir: en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, \infty)$.

Ejercicio 4

a) Factorizamos el denominador en: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ e integramos descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \iff A(x+2) + B(x-2) = 1 \iff A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}.$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\log|x-2| - \log|x+2|\right).$$

b) Integramos por partes: $u = x, \quad dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \implies du = dx, \quad v = -\cos(x)$.

$$\int_0^\pi x\operatorname{sen}(x)\,dx = \Big[-x\cos(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)dx = \pi + \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_0^\pi = \pi.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Multiplicamos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de AB como mucho es 2 porque sólo tiene 2 filas. Como no son una múltiplo de la otra, son linealmente independientes, luego el rango es 2.

b) Para que tenga inversa su determinante ha de ser distinto de cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix} = 3k + k^2 = 0 \iff k = 0\,,\ k = -3\,.$$

Entonces, para que exista inversa, k puede tomar cualquier valor salvo el 0 y el -3.

Ejercicio 2

a) El vector de dirección de la recta es el producto vectorial de los vectores de dirección de las otras dos rectas:

$$\vec{d} = (2,1,-3) \times (-1,1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-1,3).$$

La recta pedida tiene por ecuación:

$$\frac{x-5}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}\,.$$

b) Utilizamos el producto mixto para calcularlo:

$$\vec{v_1} \cdot (\vec{v_2} \times \vec{v_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \implies \text{Vol} = \Big|\vec{v_1} \cdot (\vec{v_2} \times \vec{v_3})\Big| = \big|1\big| = 1.$$

Ejercicio 3

a) La recta tangente tiene ecuación:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

donde $x_0 = 2$ y $f(x_0) = f\,(2) = 2$. Derivamos ahora para calcular $f'\,(2)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Longrightarrow \quad f(2) = 12 - 3 = 9.$$

La recta es entonces:

$$y = 2 + 9(x - 2) \quad \Longrightarrow \quad y = 9x - 16.$$

b) El numerador y el denominador tienden a cero cuando x tiende a cero, luego aplicamos la regla de L'Hôpital. Lo mismo vuelve a ocurrir en lo que obtenemos y la volvemos a aplicar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2}\,.$$

Ejercicio 4

a) Calculamos límites en ∞ y $-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1,$$

por tanto, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. Buscamos asíntotas verticales en los puntos donde se anula el denominador: $x = 1$ y $x = -1$, hallando los límites laterales. Descomponemos el denominador en factores: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to (-1)^-} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = +\infty\,.$$

Entonces son asíntotas verticales las rectas $x = 1$ y $x = -1$, por los dos lados en ambos casos.

b) La función es positiva en todo el intervalo de integración, luego el área es la integral definida de la función entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$:

$$\text{Área} = \int_0^1 (x^2 + 2x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\,.$$