RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

**MATEMÁTICAS II**

Curso **2013–2014**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente sólo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

---

OPCIÓN **A**

## Ejercicio 1

**a)** Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \end{array}\right)$$

Por la última fila, si $\lambda = 1$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq 1$ ambas matrices tienen rango 3 y el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

**b)** Sustituímos $\lambda = -1$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego la solución es $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

## Ejercicio 2

**a)** Un vector de dirección de $r$ es $\vec{v}_1 = (2,0,1)$ y un vector de dirección de $s$ es $\vec{v}_2 = (1,2,-1)$. Un vector perpendicular se obtendrá con su producto vectorial:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2,3,4).$$

**b)** El plano tiene por vector perpendicular el hallado en el apartado anterior y pasa por el punto $P = (1,3,-1)$. La ecuación será:

$$\pi : \quad (-2,3,4)\cdot(x-1, y-3, z+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x + 3y + 4z - 3 = 0.$$

## Ejercicio 3

**a)** Calculamos $f(\pi) = \pi - \cos(\pi) = \pi + 1$ , la recta pasa entonces por el punto $(\pi, \pi+1)$. La pendiente será $f'(\pi)$, calculamos:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x \quad \Longrightarrow \quad f'(\pi) = 1 + \operatorname{sen}(\pi) = 1.$$

La recta es:

$$y = \pi + 1 + (x - \pi) = x + 1.$$

**b)** Estudiamos el signo de la derivada, recordando que $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x \geq 0,$$

Entonces, la función es creciente siempre, porque su derivada es positiva o cero.

## Ejercicio 4

**a)** Calculamos la integral

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln(5) - \ln(4)\right) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

**b)** Calculamos las raíces del denominador y obtenemos:

$$\int \frac{2}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-2}{x+1} + C.$$

---

OPCIÓN **B**

## Ejercicio 1

**a)** Multiplicamos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango de $AB$ como mucho 2 y como las dos filas no son una múltiplo de la otra, el rango es efectivamente 2.

**b)** Para que no se pueda invertir la matriz su determinante ha de ser cero. Calculamos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 1.$$

Luego para que no se pueda invertir $M$, debe ser $k = 1$.

## Ejercicio 2

**a)** La recta puede tener por vector dirección cualquiera de los vectores de dirección del plano o cualquier combinación lineal suya, por ejemplo $\vec{v} = (3, 1, 2)$. La ecuación de la recta queda:

$$r: \quad \frac{x-2}{3} = y - 1 = \frac{z+2}{2}.$$

**b)** Utilizamos la fórmula para hallar la distancia:

$$\operatorname{dist}(P, \pi_2) = \frac{|2(2) - 1 - 2(-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{3}.$$

## Ejercicio 3

**a)** Al sustituir queda una indeterminación. Multiplicamos y dividimos por $x + \sqrt{x^2+1}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x - \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x(x^2 - (x^2+1))} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{-x} = -2.$$

**b)** Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Esos son los puntos críticos. La segunda derivada nos da: $f''(x) = 6x - 4$ . Sustituimos en los puntos críticos y obtenemos:

$$\begin{aligned} f''(0) = -4 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{es un máximo local,} \\ f''\left(\tfrac{4}{3}\right) = 4 > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3} \quad \text{es un mínimo local.} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4**

**a)** Calculamos límites en $\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-6} = 2, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-6} = 2\,.$$

Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal, para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. Calculamos ahora:

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{2x}{x-6} = \infty \qquad \lim_{x\to 6^-} \frac{2x}{x-6} = -\infty\,.$$

Por tanto, $x = 6$ es asíntota vertical por los dos lados.

**b)** Integramos por partes:

$$u = x, \quad dv = e^{2x}dx \quad \Longrightarrow \quad du = dx, \quad v = \frac{e^{2x}}{2}\,.$$

$$\int xe^{2x}dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$