RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

Curso **2014–2015**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente solo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda+7 & 8 \end{array}\right)$$

Por la última fila, si $\lambda = -7$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq -7$ ambas matrices tienen rango 3 y el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

b) Sustituímos $\lambda = 1$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego la solución es $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$.

Ejercicio 2

a) Un vector de dirección de r es $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ y un vector de dirección de s es $\vec{v}_2 = (2, 1, 2)$. Calculamos un vector perpendicular mediante su producto vectorial:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 3).$$

b) El plano tiene por vector perpendicular el hallado en el apartado anterior y pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$. La ecuación será:

$$\pi : \quad (-2, -2, 3) \cdot (x-1, y, z-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

Ejercicio 3

a) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = x^2 - 2x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad \text{o bien} \quad x = 2,$$

como el coeficiente de x^2 es positivo: $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, allí f es creciente y $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$, allí f es decreciente.

b) Calculamos $f(1) = -\frac{2}{3}$, la recta pasa entonces por el punto $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$. La pendiente será $f'(1) = -1$ y la recta es:

$$y = -\frac{2}{3} - (x - 1) = -x + \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 4

a) Descomponemos en dos términos que se integran directamente:

$$\int \frac{x-3}{x^2+4}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{3}{2}\frac{1/2}{(x/2)^2+1} \right) dx = \frac{1}{2}\ \ln(x^2+4) - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

b) Como $1+\operatorname{sen} x \geq 0$ siempre, la curva queda por encima del eje X o como mucho lo toca. El área pedida es:

$$\int_0^{2\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx = \Big[x - \cos x\Big]_0^{2\pi} = 2\pi - 1 - (0-1) = 2\pi.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Multiplicamos:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de AB como mucho es 2 y como las dos columnas no son una múltiplo de la otra, el rango es efectivamente 2.

b) Para que tenga inversa la matriz su determinante ha de ser no nulo. Calculamos:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2k^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k=1, \quad \text{o bien} \quad k=-1.$$

Luego para que haya inversa debe ser $k \neq 1$ y $k \neq -1$.

Ejercicio 2

a) Utilizamos la fórmula para hallar la distancia:

$$\operatorname{dist}(A,\pi) = \frac{|2(-2) - 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

b) La recta tiene por vector dirección el vector normal del plano: $\vec{v} = (2,-1,1)$, luego su ecuación será:

$$r: \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = z-1\,.$$

Ejercicio 3

a) Como $\quad 1-x^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\pm 1$, el dominio de f es: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Derivamos para calcular los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(1-x^2)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2\pm\sqrt{3}.$$

Esos dos puntos son los puntos críticos.

b) Calculamos los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{1-x^2} = 0.$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. Además:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{1-x^2} = \infty.$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x+2}{1-x^2} = -\infty.$$

Luego $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales por los dos lados.

Ejercicio 4

a) La función g es continua en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ porque es un polinomio en cada uno de ellos. Para que sea continua también en $x = 1$ deben coincidir allí los límites laterales y ser iguales al valor $f(1)$:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) \iff \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 1 = \lim_{x\to 1^+} (Ax + B) = A + B$$

Como $g(1) = A + B$, la relación que debe cumplirse para la continuidad en toda la recta es:

$$A + B = 1.$$

b) Para ser derivable también tiene que ser continua, luego ya sabemos que $A + B = 1$. La función es derivable en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ porque es un polinomio en cada intervalo. Su derivada es:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ A & x > 1. \end{cases}$$

Para que haya derivada en $x = 1$ debe existir el límite de $g'(x)$ en ese punto, y para ello:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} g'(x) \iff \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 = \lim_{x\to 1^+} A = A.$$

Entonces, para ser derivable en todo $\mathbb{R}$ debemos tener $A = 2$. Con la condición $A + B = 1$ obtenemos: $B = -1$. En ese caso tendremos que $g'(1) = 2$.