RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
MATEMÁTICAS II
Curso **2015–2016**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente solo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda+3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{5}{2} & 5 \end{array}\right)$$

Por la última fila, si $\lambda = -\frac{5}{2}$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq -\frac{5}{2}$ ambas matrices tienen rango 3 y el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

b) Sustituímos $\lambda = 0$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Luego la solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

Ejercicio 2

a) Las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$r : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2\lambda + \mu \\ y & = & 2 + 2\mu \\ z & = & -\lambda - 3\mu, \end{array}\right.$$

b) Calculamos la ecuación continua del plano, un vector perpendicular es:

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (2, 5, 4).$$

$$\pi : \quad (2,5,4)\cdot(x+1, y-2, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 5y + 4z - 8 = 0.$$

La distancia de P a este plano es:

$$d(P,\pi) = \frac{|2(1) + 5(2) + 4(-2) - 8|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{45}} = \frac{4}{\sqrt{45}}.$$

Ejercicio 3

a) El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculamos los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Esto nos da la asíntota horizontal $y = 2$ para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty.$$

Esto nos da la asíntota $x = 1$ por la derecha y por la izquierda.

b) Hallamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Calculamos ahora:

$$f(-1) = \frac{2(-1)+1}{-2} = \frac{1}{2}, \qquad f'(-1) = \frac{-3}{(-2)^2} = \frac{-3}{4},$$

y la recta tangente queda:

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x+1) = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 4

a) La función es continua fuera del 1 porque en $x < 1$ es un polinomio y en $x > 1$ no se anula el denominador de $1/x$. Para que sea continua en todo $\mathbb{R}$ debe tenerse:

$$\lim_{x\to 1^-} (Ax^2 + B) = A + B = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

b) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2Ax, & x < 1, \\ \dfrac{-1}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Está bien definida salvo en el punto 1. Para que haya derivada en ese punto debe tenerse que:

$$\lim_{x\to 1^-} 2Ax = 2A = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x^2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{-1}{2}.$$

Junto con la condición del primer apartado tenemos:

$$B = 1 - A = \frac{3}{2}.$$

Con esos valores la función es continua y derivable en toda la recta.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Multiplicamos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de AB como mucho es 3, buscamos algún determinante de orden 3 que no se anule. La cuarta columna es múltiplo de la tercera y como:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

el rango resulta ser 2, porque sí hay dos columnas independientes.

b) Para que tenga inversa la matriz su determinante ha de ser no nulo. Calculamos:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + k + 1.$$

Como ese polinomio nunca es cero, para todos los valores reales de k la matriz es invertible.

Ejercicio 2

a) El plano tiene por vector normal al del plano dado y ha de pasar por P, luego su ecuación es:

$$(2, -1, 3) \cdot (x - 5, y + 1, z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - y + 3z - 11 = 0.$$

b) La recta tiene por vector de dirección el vector normal de esos planos y pasa también por P, su ecuación es:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Ejercicio 3

a) Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó bien} \quad x = \frac{4}{3}.$$

Esos dos puntos son los puntos críticos.

b) El signo de la derivada es:

$f'(x) > 0$ en $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, luego allí f es creciente.

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $\left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$, allí f es decreciente.

Entonces el punto $x = 0$ es un mínimo relativo y $x = \dfrac{4}{3}$ es un máximo relativo. También se puede resolver con el signo de la segunda derivada.

Ejercicio 4

a) Calculamos la composición y derivamos:

$$(f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big) = \operatorname{sen}\Big(2(x^2 + 1)\Big) = \operatorname{sen}(2x^2 + 2),$$

$$(f \circ g)'(x) = 4x \cos(2x^2 + 2).$$

b) Utilizamos la regla de Barrow:

$$\int_0^1 \Big(x^2 + \operatorname{sen}(\pi x)\Big) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\cos(\pi) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos(0)\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$