RESOLUCIÓN PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

Curso **2016–2017**

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente solo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1

a) Utilizando el método de Gauss, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda+5 & 18 \end{array}\right)$$

Por la última fila, si $\lambda = -5$ el rango de la matriz del sistema es 2 mientras que el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda \neq -5$ ambas matrices tienen rango 3 y el sistema es compatible determinado porque hay tres incógnitas.

b) Sustituímos $\lambda = 1$ y continuamos lo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Luego la solución es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

Ejercicio 2

a) El vector perpendicular al plano es

$$(-1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, 3, -1).$$

La recta es:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

b) Calculamos la ecuación continua del plano, con el vector perpendicular que conocemos ya y un punto del plano, $P = (1, -3, 0)$:

$$\pi: \quad (3, 3, -1) \cdot (x-1, y+3, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x + 3y - z + 6 = 0.$$

La distancia de A a este plano es:

$$d(A, \pi) = \frac{|3(2) + 3(-2) - 1(1) + 6|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{19}}.$$

Ejercicio 3

a) El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, porque allí se anula el denominador. No es par ni impar, porque:

$$f(-x) = \frac{-x}{-x-1}$$

que no es $f(x)$ ni $-f(x)$.

b) Calculamos límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}\,,$$

luego $y=1$ es asíntota horizontal, para $x\to\infty$ y para $x\to-\infty$. Calculamos ahora los límites laterales en $x=1$:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=\infty,\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty,$$

luego hay una asíntota vertical en $x=1$, por los dos lados.

Ejercicio 4

a) Descomponemos en fracciones simples e integramos:

$$\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\quad\Longrightarrow\quad x+1=A(x+2)+B(x-2)\quad\Longrightarrow\quad A=\frac{3}{4},\quad B=\frac{1}{4}\,.$$

$$\int\frac{x+1}{x^2-4}\,dx=\int\left(\frac{3/4}{x-2}+\frac{1/4}{x+2}\right)dx=\frac{3}{4}\log|x-2|+\frac{1}{4}\log|x+2|+C.$$

b) Integramos la función entre los dos límites:

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\operatorname{sen}(2x)+\cos(x)\Big)dx=\left[-\frac{\cos(2x)}{2}+\operatorname{sen}(x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}+1-\left(-\frac{1}{2}\right)=2.$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1

a) Multiplicamos:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\6&-6\\2&0\\3&-2\end{pmatrix}.$$

El rango como mucho es 2, buscamos un menor 2×2 que sea distinto de cero, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix}1&-2\\6&-6\end{vmatrix}=6\neq0\,,$$

luego efectivamente tiene rango 2.

b) Para que tenga inversa la matriz su determinante ha de ser no nulo. Calculamos:

$$|M|=\begin{vmatrix}1&K&0\\-2&0&K\\1&3&1\end{vmatrix}=K^2-K=0\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}K=0,\\K=1,\end{cases}$$

luego para que sea invertible ha de ser $K\neq0$ y $K\neq1$.

Ejercicio 2

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$\pi:\quad\begin{cases}x=-2+2\lambda+\mu,\\y=1-\lambda+2\mu,\\z=3\lambda+\mu.\end{cases}$$

b) Para hallar la distancia calculamos la ecuación continua del plano, comenzando con su vector normal:

$$(2,-1,3)\times(1,2,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-7,1,5).$$

La ecuación es:

$$(-7,1,5)\cdot(x+2,y-1,z)=0 \quad\Longrightarrow\quad -7x+y+5z-15=0\,.$$

La distancia a la recta es la distancia a cualquier punto de la recta, porque es paralela al plano, luego:

$$d(r,\pi)=d((1,-2,0),\pi)=\frac{|-7(1)+1(-2)+5(0)-15|}{\sqrt{7^2+1^2+5^2}}=\frac{24}{\sqrt{75}}\,.$$

Ejercicio 3

a) Calculamos el valor de f y su derivada en π:

$$f(\pi)=\pi-\operatorname{sen}(2\pi)=\pi,\quad f'(x)=1-2\cos(2x),\quad f'(\pi)=1-2\cos(2\pi)=-1\,.$$

La ecuación de la recta queda:

$$r:\quad y=f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)\quad\Longrightarrow\quad y=\pi-(x-\pi)=2\pi-x.$$

b) Componemos y derivamos:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3)=x^3-\operatorname{sen}(2x^3)\quad\Longrightarrow\quad (f\circ g)'(x)=3x^2-6x^2\cos(2x^3).$$

Ejercicio 4

a) Fuera del punto $x=1$ la función es continua. Para que sea continua en el punto $x=1$ necesitamos que coincidan los límites laterales allí, luego:

$$-1+A=B\,.$$

b) Para que sea derivable necesitamos que además haya límite de la derivada en ese punto:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-2)^2}, & x<1,\\[2ex] 2Bx, & x>1.\end{cases}$$

Los límites laterales en $x=1$ son:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{(x-2)^2}=-1,\qquad \lim_{x\to1^+}2Bx=2B.$$

Junto con la condición para la continuidad, tenemos:

$$-1=2B\quad\Longrightarrow\quad B=\frac{-1}{2}\quad\Longrightarrow\quad A=B+1=\frac{1}{2}.$$