Antonio Lecuona Neumann
José Ignacio Nogueira Goriba

Tema 2: Acústica física II

- Ecuaciones del movimiento en un medio no absorbente.
- Ecuación de ondas y soluciones 1D.
- Velocidad del sonido.
- Ejemplo: campo progresivo en un tubo semi-infinito P'_{+}.
- Condiciones de contorno. Fuentes reales y virtuales.
- Fuentes de sonido y fuentes simples.

Ecuaciones del movimiento en un medio no absorbente

- Plantean las ecuaciones de propagación del sonido sin absorción ni generación del medio (ecuaciones homogéneas).
- Asumamos pequeñas perturbaciones sobre los valores atmosféricos y adimensionalizemos:

Presión absoluta real

Presión acústica

$$\frac{\boldsymbol{P} - P_{at}}{P_{at}} = \frac{P}{P_{at}} = P' << 1 \;;\; \text{Densidad: } \frac{\rho - \rho_{at}}{\rho_{at}} = \rho'$$

- Asumamos compresiones y expansiones isentrópicas (no hay degradación de la energía):

$$s = cte. \Rightarrow \frac{\boldsymbol{P}}{\rho^{\gamma}} = cte. \rightarrow \frac{d\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \;;\; \gamma = \frac{c_p}{c_v} = cte. \Rightarrow$$

Ec. (1) $\Rightarrow dP' - \gamma d\rho' = 0 \Rightarrow d\rho' \approx dP'$ pues en el aire $\gamma = 1,4$

Ecuaciones del movimiento en un medio no absorbente

- La ecuación de continuidad (conservación de la masa) en un movimiento unidimensional (1D) con velocidad $u\langle x,t\rangle$ resulta ser:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

- Aplicación: si estimamos los órdenes de magnitud de ambos términos de la ecuación:

$$\{T \text{ es el período}\}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \rho'}{\partial t}\approx\dfrac{\rho'}{T}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}\approx\dfrac{u}{\lambda}\end{array}\right\}\rightarrow \dfrac{\rho'}{T}\approx\dfrac{u}{\lambda}\\[2ex] \qquad\qquad\qquad\quad \lambda=aT\end{array}\right\}\rightarrow \frac{u}{a}\approx\rho' << 1$$

$\Rightarrow$ Las velocidades involucradas son diminutas frente a la velocidad del sonido a.

Ecuación de ondas y soluciones 1D

- La ecuación de cantidad de movimiento 1D con $P'\langle x,t\rangle$ resulta ser:

$$-\frac{\partial P'}{\partial x}=\frac{\rho_{at}}{P_{at}}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3)$$

- Se pueden combinar las tres Ecs. (1) (2) y (3) para dar una única en P':

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 P'}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\gamma P_{at}/\rho_{at}}\dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2}\\[2ex] \text{Gas ideal: } \gamma P_{at}/\rho_{at}=\gamma R_g T_{at}\equiv \underbrace{a^2}_{\text{Una cierta velocidad}^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}$$

- Es la **ecuación de ondas**
- Es lineal, pues solo se usa + y – y multiplicación por constantes.

Antonio Lecuona Neumann
José Ignacio Nogueira Goriba

Ecuación de ondas y soluciones 1D

- Al ser la ecuación lineal, se cumple el **principio de superposición** → ¡¡ nos vale la descomposición de Fourier y podemos estudiar ondas simples para después sumarlas y formar una compleja arbitraria !!.
- La **solución general** a la ecuación de ondas 1D es:

$$P'\langle x, t, \mathsf{a} \rangle = P'_{+}\langle \mathsf{a}t - x \rangle + P'_{-}\langle \mathsf{a}t + x \rangle$$

- P'_{+} y P'_{-} son funciones arbitrarias (formas de onda).
- Representan ondas que se desplazan sin cambio hacia x mayores (progresivas $_{+}$, ver transparencia 10) y hacia x menores (regresivas $_{-}$) a la velocidad a pues se obtiene la misma P' en $x = x_0 \pm \mathsf{a}t$
- Por comparación con la realidad $\Rightarrow \mathsf{a} \equiv a$**, que es la velocidad del sonido.**
- Estas ondas son creadas por las "fuentes", que engendran perturbaciones de presión. Inyectan energía en el campo, en cuyo seno se mantiene la energía constante.

Velocidad del sonido

- Aparte de verse en ambos, ecuaciones y realidad, un desplazamiento a velocidad constante de las perturbaciones engendradas, ¿la velocidad de las ecuaciones se parece en valor a la real?
- Velocidad del sonido en el aire (resulta ser exclusivamente dependiente de la temperatura para un gas ideal):

$$\left.\begin{array}{l} T_0 = 15^{\circ}\mathrm{C} = 288{,}16\,\mathrm{K}\ ;\ \ \gamma = 1{,}4 \\ \left.\begin{array}{l} R_g = \dfrac{R}{PM} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J/(molK)} \\ PM = 28{,}8\,\mathrm{g/mol} \end{array}\right\} \rightarrow R_g = 0{,}289\,\mathrm{J/(gK)} \end{array}\right\} \rightarrow a = \sqrt{\gamma R_g T} = 341\,\mathrm{m/s}$$

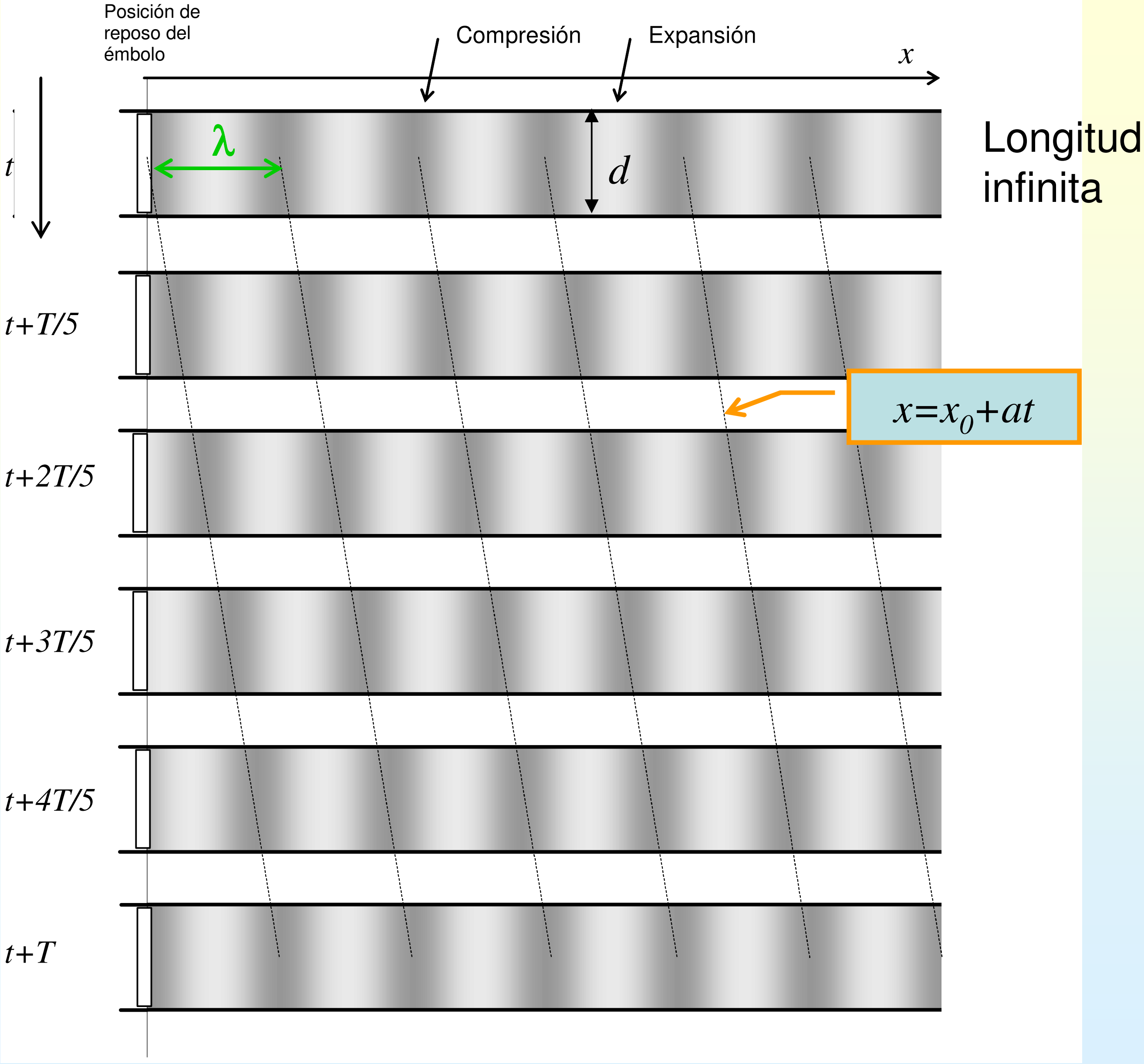
Coincide prácticamente con la velocidad de propagación medida, corroborando la hipótesis de isentropía, ec. (1).

En el pasado se creyó que la evolución del gas en las ondas acústicas era isoterma, pero en ese caso la velocidad resultante no coincide con la del sonido en la realidad.

Antonio Lecuona Neumann
José Ignacio Nogueira Goriba

Ejemplo: campo progresivo en un medio semi-infinito P'_+

- Fuente: pistón que oscila deprisa (altavoz p. e.), con periodo T y amplitud pequeña para estar en el dominio acústico.
- Vista del campo de presión en distintos tiempos para una onda progresiva.
- Para que este paradigma sea válido ha de ser $\lambda >> d$.
- Esto es similar a lo que aparece en la fig. 0 del tema 1, pero con intervalos de tiempo menores



Condiciones de contorno. Fuentes reales y virtuales

- Las funciones $P'+$ y $P'-$ se determinan con las condiciones de contorno temporales.
- Por ejemplo: En el caso del pistón **se igualaría la velocidad del fluido con la velocidad del pistón en x = 0**.
- Esta identificación con la excitación apoya algo supuesto anteriormente y es que en el campo acústico solo hay las frecuencias que impone la excitación, por lo que se la llama *fuente*.
- Si el cilindro es finito en longitud aparecen ondas regresivas (propagándose en sentido contrario), pues en su extremo habrá de aplicarse una condición de contorno similar a la aplicada en el extremo izquierdo.
  - Por ejemplo, supongamos que el extremo derecho $x = L$ está abierto a la atmósfera. En este caso, **la perturbación de presión en él ha de ser nula***, luego:

$$\forall t: P'_{+}(L-at)+P'_{-}(L+at)=0 \Rightarrow P'_{-}\left[2L-\left(L-at\right)\right]=-P'_{+}(L-at)$$

  - Las 2 funciones han de tener la misma forma, pero el signo cambiado en la variable dependiente e independiente, además de desfasadas $2L$.
  - Visto de otra manera, al llegar las perturbaciones a $x = L$ "aparece", pues llega desde $2L$, una perturbación igual y contraria que ha de anular la incidente. La que aparece se propaga hacia la izquierda y se superpone a ella, llegando al pistón más tarde. Por lo tanto, el extremo no introduce nuevas frecuencias, sino una imagen especular.

CONCLUSIÓN: *Reflexión del sonido*. Al llegar ondas a un cambio (en el material o en la forma), aparecen ondas con igual forma propagándose en sentido contrario. Es como una nueva fuente.

* Según Kinsler, L. E. et al., "Fundamentals of Acoustics, 2ª ed., Wiley, 1982, p.203, el coeficiente de transmisión de potencia a la atmósfera de un cilindro de diámetro d con brida es $T_\pi = 2(\omega d/a)^2 << 1$ generalmente. Para una terminación sin brida es la mitad. Una terminación abocinada aumenta este coeficiente mucho, de ahí la forma de los instrumentos musicales de viento.

Fuentes de sonido y fuentes simples

- Las fuentes acústicas reales crean oscilaciones de presión en el aire.
- Las más simples son:
  - Globo que pulsa: **monopolo**, radia por igual en todas direcciones, es omnidireccional.
  - Pistón libre que oscila de adelante a atrás, radia primordialmente hacia esas dos direcciones, es direccional y se denomina **dipolo**.
  - Otra simplificación es el **cuadripolo**. Radia primordialmente en 4 direcciones ortogonales.

Las fuentes reales suelen ser complejas y describibles por una superposición de estas fuentes elementales. Véase a continuación.

Fuentes de sonido y fuentes simples

Animación de fuentes simples de la Kettering University

Características generales. Sea una fuente de tamaño característico L:

- Cuando $\lambda >> L$ las fuentes acústicas se aproximan a la omnidireccionalidad (radiación en todas direcciones).
- Al llegar a ser $\lambda \sim L$ se comportan más direccionalmente cuanto menor es λ. Así los altavoces son omnidireccionales para sonidos graves y direccionales para los agudos.
- Ejemplo real, altavoz:

Diagrama polar de la intensidad acústica creada por un mismo altavoz real a tres frecuencias. Cada división son 6 dB.

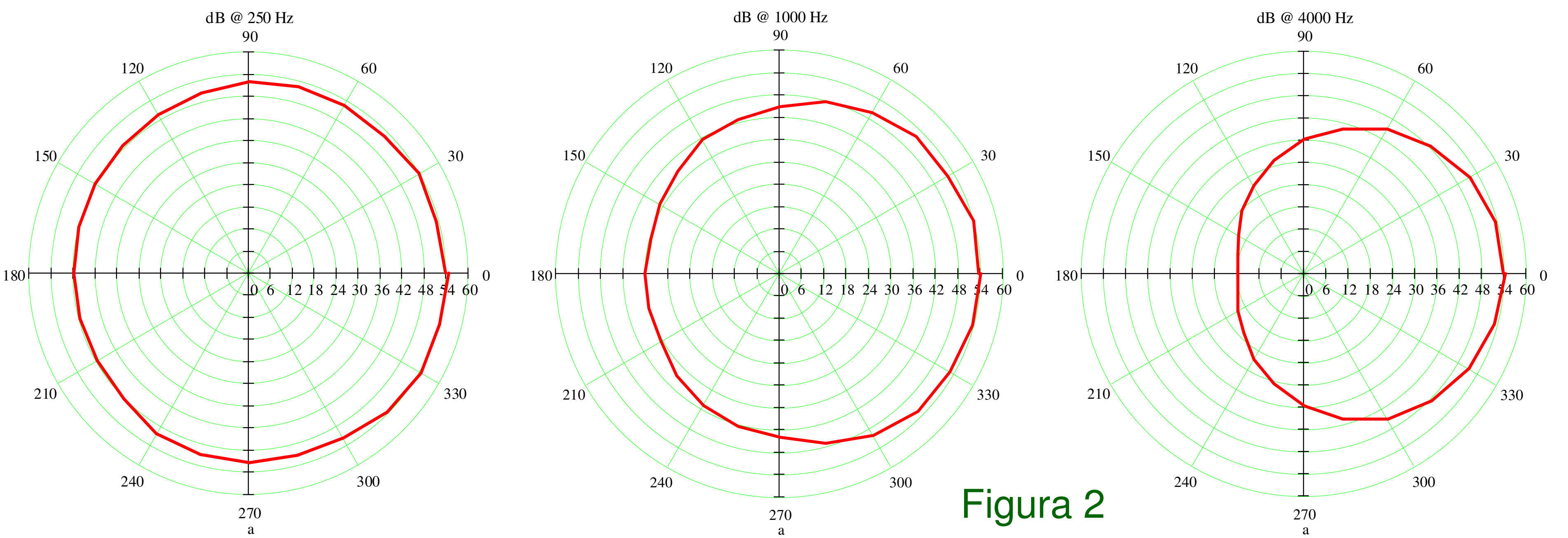
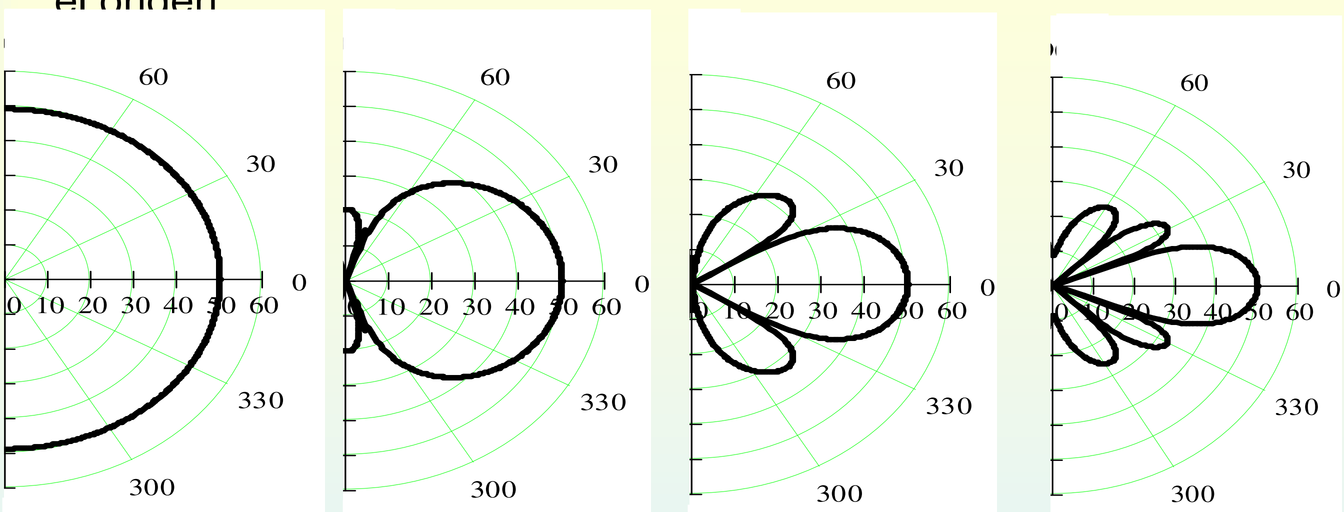


Figura 2

Antonio Lecuona Neumann
José Ignacio Nogueira Goriba

Fuentes de sonido y fuentes simples

Cálculo teórico del nivel acústico engendrado por un altavoz-pistón de diámetro d en el centro de una placa plana rígida infinita con onda sinusoidal, por lo que no puede emitir hacia atrás. **Direccionalidad**. Las curvas indican intensidad acústica en la dirección desde el origen



dk = 1 dk = 2 dk = 5 dk = 10

Se ha normalizado al máximo del cuadrado del valor *rms* de la presión acústica usando: $10\log(P_{rms}/P_{rmsmax})^2 = 50$ dB.Cada círculo son 10 dB.

Omnidireccional para $dk \ll 1$

$k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda [m^{-1}]

Muy direccional para $dk \gg 1$

Pistón y placa explicado y altavoz real de la Kettering University:

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/BaffledPiston/BaffledPiston.html

Cuestiones de autoevaluación, tema 2

- ¿Es el sonido en un medio no absorbente una onda elástica?
- ¿Cuales son las repercusiones de que las ecuaciones de la acústica sean lineales?
- Si una fuente emite con un cierto espectro, ¿el oyente recibe el mismo espectro en la propagación en el aire?.
- ¿Depende la velocidad del sonido de la presión atmosférica?
- ¿Pueden tratarse todas las fronteras de un campo como espejos?
- ¿Conviene que un altavoz sea pequeño si se quiere que reparta el sonido lo mejor posible?
- Como continuación de la cuestión anterior estime el diámetro máximo para hacer omnidireccional un altavoz de graves (subwoofer), tomando para ello 40 Hz como referencia. Estime también el tamaño máximo para un altavoz de agudos (tweeter); para ello tome una referencia de 10 kHz.

Antonio Lecuona Neumann
José Ignacio Nogueira Goriba

Actividades propuestas, tema 2

- En la ec. 0 del tema 1 se expresa como obtener el nivel en decibelios de una magnitud. La fig. 1 del tema 1 muestra que el umbral de dolor del nivel de presión acústica es de unos 120 decibelios. Teniendo en cuenta que el nivel de presión acústica se define con $M \equiv P_{rms}{}^2$, determine cuan mayor es este umbral con respecto al umbral de percepción a 1 kHz (valor mínimo capaz de originar una percepción).
- Compare el valor obtenido con la presión atmosférica y del resultado obtenga la verificación de la hipótesis de pequeñas perturbaciones del campo acústico.