CURSO CERO DE FÍSICA

APLICACIÓN DE VECTORES A LA FÍSICA

Vanessa de Castro y Susana Briz
Departamento de Física

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

CONTENIDO

- Magnitudes escalares y vectoriales.

- Representación gráfica de vectores en el plano y el espacio 3-D. Suma y resta geométrica de vectores.

- Representación algebraica de vectores. Sistema de coordenadas.

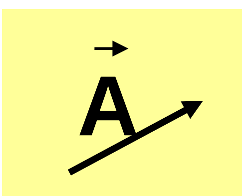
- Operaciones algebraicas con vectores I. Suma, resta y multiplicación por un escalar.

- Operaciones algebraicas con vectores II. Producto escalar y producto vectorial.

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Ciertas magnitudes físicas se definen por completo dando un número. Por ejemplo, la masa, el tiempo o la energía. Estas magnitudes se denominan escalares.

Otras magnitudes físicas, para estar totalmente definidas necesitan que además de la masa se especifiquen su dirección y sentido. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad o el campo eléctrico. Estas magnitudes se denominan vectoriales.



VECTOR: consta de

Módulo **Dirección** **Sentido**

Para definir una magnitud vectorial necesitamos conocer su módulo, dirección y sentido.

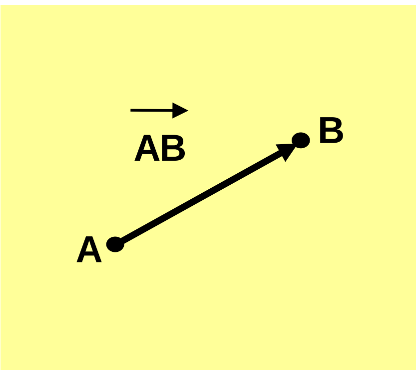
Dos vectores serán iguales cuando tengan igual módulo, dirección y sentido.

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE VECTORES EN EL PLANO Y EL ESPACIO 3-D. SUMA Y RESTA GEOMÉTRICA.

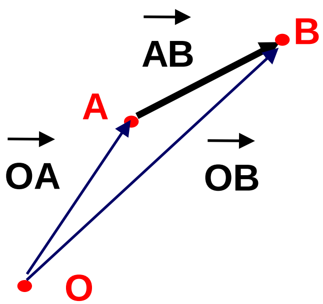
Los vectores se representan gráficamente con una flecha que une dos puntos:

La distancia entre los puntos A y B es el módulo (longitud) del vector $\overrightarrow{AB}$.



$$d(A,B) = \left|\vec{AB}\right|$$

El vector AB tiene su origen en el punto A y su final en el punto B. Su dirección es la de la recta que une A con B. Su sentido es desde A hasta B.



$$A\vec{B} = O\vec{B} - O\vec{A} = \vec{B} - \vec{A}$$

¿Por qué?

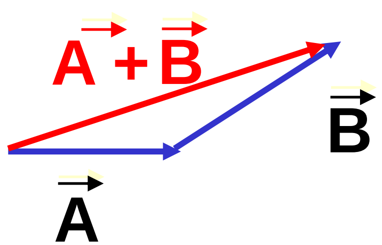
Veamos como se suman y restan geométricamente los vectores.

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

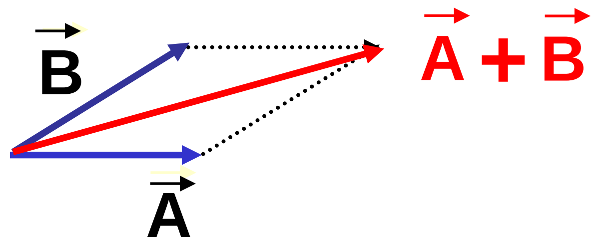
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE VECTORES EN EL PLANO Y EL ESPACIO. SUMA Y RESTA GEOMÉTRICA.

SUMA GEOMÉTRICA DE DOS VECTORES

Se ponen uno a continuación del otro:



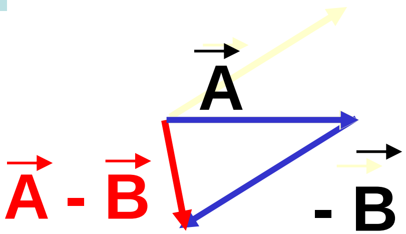
O bien se usa la regla del paralelogramo:

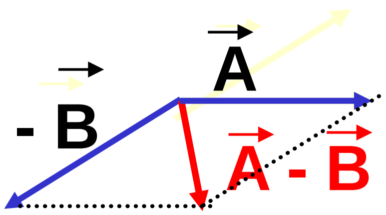


Ejemplos de suma geométrica de vectores en el plano (Proyecto Descartes)

RESTA GEOMÉTRICA DE DOS VECTORES

De manera equivalente a la suma:





REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE VECTORES. SISTEMA DE COORDENADAS

Para representar vectores algebraicamente se necesita un sistema de referencia (también llamado sistema de coordenadas o base). Cualquier vector del espacio de tres dimensiones se puede escribir en función de tres vectores independientes que son una base de ese espacio (y cualquier vector del plano se puede escribir en función de dos vectores independientes que son una base del plano).

SISTEMA DE REFERENCIA O BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Es un conjunto de vectores capaces de generar por combinación lineal todos los vectores de ese espacio vectorial. Es la "escala" respecto a la cual representamos los demás vectores. Una base ha de estar formada por vectores linealmente independientes.

Coordenadas de un vector (Proyecto Descartes)

VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si para obtener una combinación lineal nula, todos los coeficientes de la combinación lineal (a, b, c) son cero:

$a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = 0 \rightarrow a=b=c=0.$

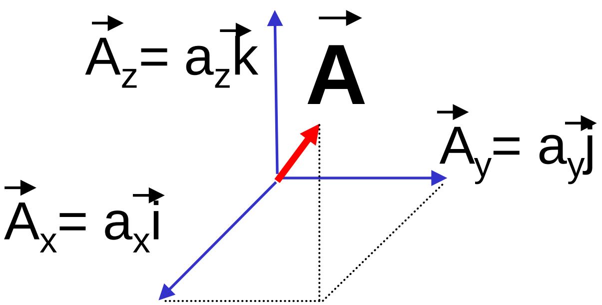
Es decir, si el sistema de ecuaciones lineales formado por esos vectores es compatible determinado.

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE VECTORES. SISTEMA DE COORDENADAS

Un sistema de referencia ampliamente usado en física es el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas. En 3-D, en este sistema de coordenadas se elige la base:

$$\vec{i} = (1,0,0);\ \vec{j} = (0,1,0);\ \vec{k} = (0,0,1)$$

En 3-D, representamos el vector A en base a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$:



$$i = j = k = 1$$

$$A = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$A = (a_x, a_y, a_z)$$

$$A = |A| \cdot \vec{u}_A$$

$\vec{u}_A$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$

(a_x, a_y, a_z) son las coordenadas del vector. Son los coeficientes de la combinación lineal.

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES I

Algebraicamente, los vectores se suman (restan) componente a componente.

SUMA ALGEBRAICA DE DOS VECTORES

$$\vec{A}+\vec{B} = (a_x + b_x)\,\vec{u}_x + (a_y + b_y)\,\vec{u}_y + (a_z + b_z)\,\vec{u}_z$$

RESTA ALGEBRAICA DE DOS VECTORES

$$\vec{A}-\vec{B} = (a_x - b_x)\,\vec{u}_x + (a_y - b_y)\,\vec{u}_y + (a_z - b_z)\,\vec{u}_z$$

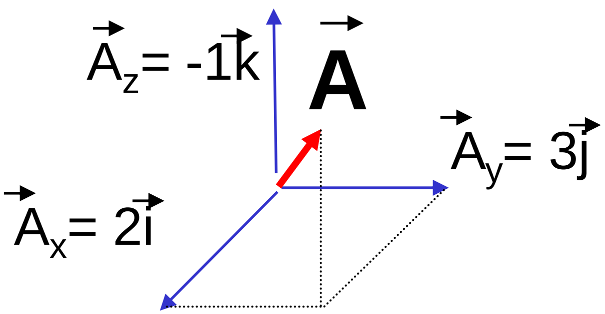
MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

$$\lambda\cdot \vec{\mathbf{A}} = (\lambda\cdot a_{x,}\ \lambda\cdot a_{y,}\ \lambda\cdot a_z)$$

Al haber elegido el sistema de referencia (la base), quedan establecidas las coordenadas de los vectores y como sabemos como se opera con ellos podemos entender mejor por qué se expresan como muestra la página 7.

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES I

Por ejemplo, sea el vector: $\vec{A} = (2,3,-1) = 2(1,0,0)+3(0,1,0)-(0,0,1)$



Lo podemos representar como:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$\vec{A} = \mathbf{(}2\mathbf{,}\ 3\mathbf{,}\ -1\mathbf{)}$$

Además, cualquier vector se puede expresar como su longitud por un vector unitario que indica su dirección y sentido:

$$\vec{A} = |A| \cdot \vec{u}_A$$

El módulo del vector se calcula aplicando:

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

El vector unitario se calcula aplicando:

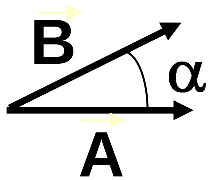
$$u_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{(A_x, A_y, A_z)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES II

PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B}$$



¡el producto escalar de dos vectores es un escalar !

Conocido a, el producto escalar se obtiene: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$

Conocidas las componentes de los vectores, el producto escalar se calcula como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

El producto escalar es nulo si:

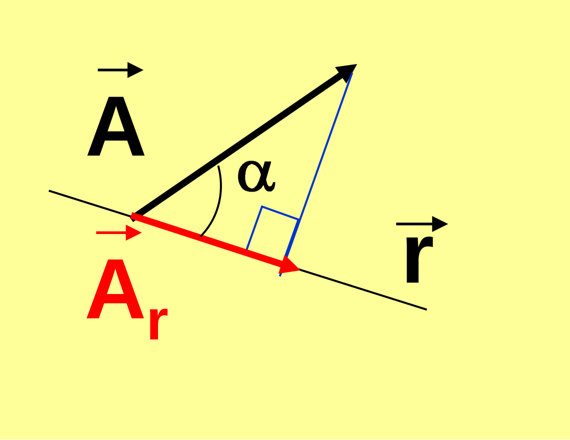
- A ó B son cero
- Son perpendiculares (α =90º)

Producto escalar de vectores en el plano (Proyecto Descartes)

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES II

La proyección del vector sobre una recta se calcula aplicando el producto escalar:



$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{A}_r\right|}{\left|\vec{A}\right|} \rightarrow A_r = A\cos\alpha$$

Si calculamos el producto escalar de **A** y un vector unitario en la dirección de la recta, el resultado es el módulo del vector $\mathbf{A_r}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{u}_r = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{u}_r\right|\cos\alpha = \left|\vec{A}\right|\cos\alpha = A_r$$

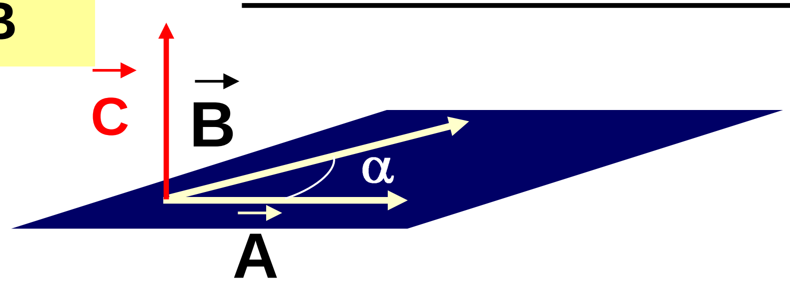
Luego el vector $\mathbf{A_r}$ se obtiene como: $\vec{A}_r = \left|\vec{A}_r\right|\vec{u}_r$

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES II

PRODUCTO VECTORIAL

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$



¡el producto vectorial de dos vectores es un vector !

Su módulo viene dado por: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB sen\,\alpha$

Su dirección es: $\vec{A}\times\vec{B}\begin{cases}\perp \vec{A}\\ \perp \vec{B}\end{cases}$

Su sentido viene dado por la regla del sacacorchos (o la regla de la mano derecha).

Para calcular este vector hay que resolver el determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\vec{k}$$

El producto vectorial es nulo si: $\begin{cases}\vec{A} = 0\,;\ \vec{B} = 0 \\ \vec{A} \parallel \vec{B}\end{cases}$

Vanessa de Castro y Susana Briz.
Dpto. de Física