# Laboratorio: Las magnitudes físicas

## MEDIDAS Y TRATAMIENTO DE DATOS

Miguel Ángel Monge
Departamento de Física

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

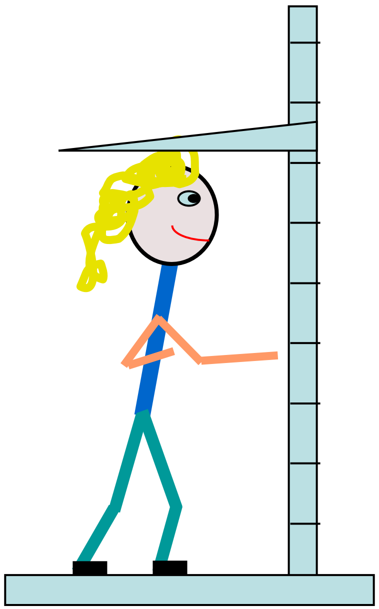
# CONTENIDO

- Las magnitudes físicas y sus medidas.
- Análisis dimensional.
- Errores o incertidumbres experimentales.
- La medida de magnitudes físicas y sus errores.
- Valores medios y errores en el valor medio.
- Cifras significativas: Redondeo.
- Propagación de errores: Error de medidas indirectas.
- Representaciones gráficas.
- Ajuste lineal de datos experimentales.

# Las magnitudes físicas y sus medidas.

Se denomina magnitud física a todo lo que puede ser medido. Ejemplos sencillos son: la masa, la temperatura o la velocidad.

Para que una magnitud física se encuentre bien determinada, es necesario especificar en que unidades se ha expresado dicha magnitud. Por ejemplo, si deseo medir la altura de una persona, he de usar una *regla* cuyas unidades de medida suelen estar expresadas según un *patrón* que es el metro:



Mide: $\underbrace{\textbf{1,75}}_{\text{Valor de la magnitud física o Intensidad}}\ \overbrace{\textbf{metros}}^{\text{Unidades}}$

*Valor* de la magnitud física

o

*Intensidad*

**Toda magnitud física debe ir acompañada de las unidades utilizadas para su medida.**

**NO olvidar nunca.**

No es lo mismo decir que mide 1,75 metros, que decir que mide 1,75 pies, o 1,75 pulgadas. El sistema de unidades más común de medida es el Sistema Internacional (SI).

# Las magnitudes físicas y sus medidas.

En el Sistema Internacional (SI), las unidades fundamentales son las que se muestran en la tabla:

| Magnitudes fundamentales | Nombre de la Unidad | Símbolo |
|---|---|---|
| Longitud | metro | m |
| Masa | kilogramo | kg |
| Tiempo | segundo | s |
| Intensidad de la corriente eléctrica | amperio | A |
| Temperatura | kelvin | K |
| Cantidad de sustancia | mol | mol |
| Intensidad luminosa | candela | cd |

Existen unidades suplementarias, de las cuales la más común es el ángulo plano. En el SI la unidad que mide los ángulos es el radián (su símbolo es ***rad***). Es una unidad adimensional.

Además del SI existen multitud de sistemas de medida como el sistema cegesimal (CGS), el sistema anglosajón de unidades o el sistema natural de unidades.

Se recomienda, siempre que sea posible, trabajar con el SI. Esto evitará errores comunes resultantes de operar con magnitudes en sistemas de unidades distintos.

Para profundizar, se recomienza el siguiente enlace:


Proyecto Newton es un recurso de aprendizaje de Física del Ministerio de Educación y Ciencia (Gobierno de España)

http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/medida/magnitudes.htm

# Análisis dimensional.

Es fundamental conocer las unidades en que se mide cualquier magnitud. El cálculo dimensional permite obtener dichas unidades de forma sencilla cuando se calcula una magnitud indirecta a partir de la expresión que permite obtenerla. Lo mostraremos mediante un ejemplo sencillo.

**Ejemplo:** Determine las unidades de medida de la velocidad, sabiendo que la velocidad de un movimiento rectilíneo uniforme se obtiene mediante la ecuación:

$$v = \frac{s}{t}$$ ; s=espacio recorrido y t=tiempo.

Los pasos a seguir son:

1.- Ponemos todas las variables entre corchetes [..] para indicar que solo nos interesa la unidad en que se mide cada una de las magnitudes.

2.- Sustituimos cada corchete por las unidades en que se mide lo que hay en su interior.

3.- En caso necesario, simplificamos como si operásemos con variables comunes.

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{m}{s}$$

[s]=metros =**m**

[t]=segundos=**s**

Por tanto, la velocidad se mide en **m/s**.

**Resultado general:** Las unidades en que se mide cualquier magnitud física solo puede tener otras unidades de medidas elevadas a potencias, productos o divisiones:

Los siguiente casos no son imposibles: $\cancel{3}\ m/s^2$ ; $\cancel{4} + m^3/kg$ ; $A/m^2 \cancel{\sin(m)}$

Miguel Ángel Monge

Dpto. de Física

# Análisis dimensional.

**Casos especiales:**

1-. Si hay números adimensionales, en lugar de una unidad de medida se pone 1.

Por ejemplo, ¿en qué unidades se mide el volumen de una esfera?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{; R=radio} \;\Rightarrow\; [V] = \frac{[4]}{[3]}[\pi][R]^3 = \frac{1}{1} 1\, m^3 = m^3$$

Ya que 4 y 3 son números sin dimensiones y π no tiene dimensiones. Luego el volumen se mide en metros cúbicos.

2-. La funciones trigonométricas (seno, coseno, …), los logaritmos y sus operaciones inversas son adimensionales, i.e., no tienen dimensiones.

Por ejemplo, ¿en qué unidades se mide el desplazamiento de un movimiento armónico simple?:

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{; } A\text{=amplitud} \;\Rightarrow\; [x] = [A][\sin(\omega t)] = m\ 1 = m$$

Ya que la amplitud se mide en *m* y el seno es adimensional, por tanto el desplazamiento se mide en metros.

# Errores o incertidumbres experimentales.

Toda medida experimental se realiza con un error o incertidumbre. Por tanto, toda medida experimental debe ir acompañada del error o incertidumbre cometido en su obtención.

Los errores se pueden clasificar en tres grupos según su origen:

• **Error de precisión**: Todo equipo de medida tiene al menos una escala. La escala determina la mínima cantidad que se puede medir con el equipo, es decir: su resolución, que determina el error de precisión cometido al utilizar el aparato. Este error se puede reducir utilizando un aparato de medida más preciso.

• **Errores sistemáticos**: Se dice que un error es sistemático cuando su efecto es incrementar o disminuir el valor de la medida siempre en la misma cantidad. Su origen suele deberse a un mal funcionamiento o calibración del equipo de medida. Una vez determinado su origen es posible eliminarlo totalmente de la medida. Solo se puede eliminar asegurándose del correcto funcionamiento del aparato y del proceso de toma de medidas.

• **Errores accidentales o aleatorios**: son los resultantes de la contribución de numerosas fuentes incontrolables que desplazan de forma aleatoria el valor medido por encima o por debajo de su valor real. Suelen denominarse **errores aleatorios** o **estadísticos**. Los errores accidentales, al contrario de los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento.

**Nota:** Usaremos las palabras error e incertidumbre indistintamente. El término incertidumbre está sustituyendo al término error, y es el actualmente aceptado en el lenguaje técnico.

# La medida de magnitudes físicas y sus errores.

**Cálculo del error de una medida directa**:

El error de la medida $\Delta x$ está determinado por el error de precisión del aparato, denominado $\varepsilon_p$. Dependiendo del tipo de aparto usado el error de precisión se calcula como:

•**Aparatos analógicos:** El error de precisión es la mitad de la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$\Delta x = \varepsilon_p = \frac{\text{Mínima magnitud medible}}{2}$$

*Ejemplo:* El error de precisión cometido al usar una regla dividida en milímetros es $\varepsilon_p$ = 0,5 mm.

•**Aparatos digitales:** El error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$\Delta x = \varepsilon_p = \text{Mínima magnitud medible}$$

*Ejemplo:* El error de precisión cometido al usar un cronómetro digital cuya medida mínima es 1 segundo es $\varepsilon_p$ = 1 s.



Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física

# La medida de magnitudes físicas y sus errores.

**<u>Cálculo del error cometido al realizar *n* medidas de una misma magnitud</u>**:

Tomar una única medida, $x_0$, puede ser poco fiable. Para aumentar la fiabilidad de la medición de una magnitud física se suelen tomar varias medidas, $x_1$, $x_2$, …. $x_n$, de la misma magnitud. Cada una de estas medidas puede dar un valor distinto y tiene asociado su error de precisión. ¿Cuál valor es el mejor? ¿Cuál es el error de la medida?

• **<u>Valor medio:</u>** El mejor valor de *n* medidas experimentales es el valor medio de todas las medias, obtenido mediante su media aritmética:

$$x_0 = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

• **<u>Error de la medida:</u>** El error asociado al cálculo del valor medio es el denominado error accidental $\varepsilon_{acc}$. Se calcula como:

$$\varepsilon_{acc} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

# La medida de magnitudes físicas y sus errores.

Pero: ¿Cuál es el error de la medida, el error de precisión o el accidental?

El error final de la medida resultante de *n* medidas, es el máximo entre el error de precisión y el accidental.

$$\Delta x = Max \quad \varepsilon_p, \varepsilon_{acc}$$

Ejemplo:

Se ha medido el diámetro *D* del tronco de un árbol con una aparato cuya mínima división es 1 cm. Si los 15 valores obtenidos del diámetro son los mostrados en la tabla, ¿cuál es el diámetro del tronco?


| Diámetro (cm) | | |
|---|---|---|
| 15.0 | 14.0 | 13.5 |
| 15.5 | 15.5 | 15.5 |
| 13.5 | 15.0 | 14.0 |
| 14.0 | 14.0 | 15.5 |
| 13.0 | 14.0 | 14.0 |

El error de precisión de cada medida directa es:

$$\varepsilon_p = \frac{1 \text{ cm}}{2} = 0,5 \text{ cm}$$

El valor medio de las 15 medidas es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{15}}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 14,4 \text{ cm}$$

El error accidental es:

$$\varepsilon_{acc} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{15}} = 0,821 \text{ cm}$$

El error de la medida es: $\Delta D = Max \quad 0.5, \ 0.82 \ = 0.82$ cm

$$\boxed{D = \ 14.4 \pm 0.8 \quad \text{cm}}$$

# Cifras significativas: Redondeo.

Cuando estimamos el error de una medida, el valor obtenido presenta con frecuencia un número arbitrario de cifras. No tiene sentido emplear cualquier número de cifras en el error, ya que es la primera cifra distinta de cero la que determina su magnitud.
Al proceso de eliminar las cifras no significativas se le denomina Redondeo. Las reglas para redondear son:

**1.-** Es necesario conocer el valor de la medida y su error **expresados en las mismas unidades.**
**2.- El error sólo debe tener una cifra distinta de cero, salvo cuando dicha cifra sea un 1 que tendrá dos cifras**. Por ejemplo, 0,6341 s debe escribirse como 0,6 s, ó 0,2921 kg se debe escribir como 0,3 kg, mientras que 1243,3 s sería 1200 s. Las reglas para obtener este resultado son:

**a)** Si la primera cifra que se suprime es mayor que 5, la última cifra conservada debe aumentarse en 1 unidad. Por ejemplo, si redondeamos un error de 0,861342 s, debemos escribir 0,9 s ya que la primera cifra que se suprime es 6 > 5 con lo que hay que sumar una unidad al 8. Otro ejemplo, si redondeamos un error de 123493 m la cifra redondeada es 120000 ya que se conservan dos cifras significativas al ser la más significativa 1 y la cifra que sigue al 2 es 3<5.

**b)** Si la primera cifra que se suprime es menor que 5, la última cifra conservada no cambia. Por ejemplo 324,393 s se debe escribir 300 s ya que la cifra más significativa que se suprime es 2<5.

**c)** Si la primera cifra que se suprime es igual a 5, pueden darse dos casos:

- Alguna de la siguientes cifras suprimidas es distinta de cero: entonces, la última cifra conservada se aumenta en 1. Por ejemplo, 38,124 s se redondea a 40 s.
- Todas las cifras suprimidas son cero: en este caso, la última cifra conservada no varía. Por ejemplo, 25.000 kg se redondea a 25 kg.

# Cifras significativas: Redondeo.

**3.-** Una vez redondeado el error, se redondea la medida aplicando las mismas reglas de redondeo 1 y 2 vistas. **El valor de la medida debe de tener la misma precisión que el error.** Por tanto, las reglas de redondeo se aplican redondeando la cifra de la medida que coincide con la posición decimal de la cifra menos significativa del error sobre la que se realiza el redondeo.

Ejemplos:

- Altura de una persona $h$=1,758 m, $\Delta h$=0,029 m :

Cifra sobre la que se redondea

1º *Se redondea el error:* **$\Delta h$=0,03 m**

Cifra con igual posición decimal en la medida

2º *Se redondea el la medida:* **$h$=1,76 m**

$$\boxed{h = 1.76 \pm 0.03 \text{ m}}$$

- Tiempo de $t$=1234,89324 s, $\Delta t$=123 s :

Cifra sobre la que se redondea

1º *Se redondea el error:* **$\Delta t$=120 m**

Cifra con igual posición decimal en la medida

2º *Se redondea el la medida:* **$t$=1230 m**

$$\boxed{t = 1230 \pm 120 \text{ s}}$$

Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física

# Propagación de errores: Error de medidas indirectas.

Cuando una media es indirecta, se obtiene mediante cálculo con una ecuación a partir de medidas directas, el error de dicha media se obtiene mediante la teoría de propagación de errores a partir de los errores de las medidas directas y sus valores usados en el cálculo, y de ecuación utilizada. Explicaremos el método más común de cálculo de errores de medidas indirectas mediante la propagación del error de las medidas directas involucradas.

**Método de cálculo de propagación de errores: Regla de las derivadas parciales.**

Suponer que tenemos varias medias, *n,* de magnitudes físicas, cada una con su error: $x_1 \; \Delta x_1$, $x_2 \; \Delta x_2, \ldots, x_n \; \Delta x_n$. A partir de estos datos y aplicando la ecuación $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hemos calculado el valor de la magnitud ***y***. ¿Cuál es el error ***Δy*** de la media indirecta ***y***?

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{\partial x_n}\right|\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$$

Por tanto el error de la medida, ***Δy***, es:

$$\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i}$$

• *En el cálculo anterior se realizan derivadas parciales, que son iguales que una derivada normal en la que todas las variables se tratan como constantes, menos la que aparece en el denominador que es respecto la que se deriva.*

Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física

# Propagación de errores: Error de medidas indirectas.

**Ejemplo:** Se tiene una barra de metal de sección cuadrada, lado *a=(2,5 0,2)* cm, y longitud *L =(92,5±0,3)* cm, cuyas dimensiones se han obtenido mediante medidas directas. ¿Calcule el volumen de la barra y su error?

El volumen de la barra se calcula mediante la ecuación:

$$V = V(a, L) = La^2$$

Por tanto, el volumen de la barra es: ***V=578,125 cm³***

Como el volumen se ha obtenido mediante una ecuación, es una medida indirecta, y para calcular su error se debe aplicar el método de propagación de errores.

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V(a,L}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial V(a,L}{\partial L}\right| \Delta L = 2a\mathrm{L}\Delta a + a^2\ \Delta L =$$
$$2 \cdot 2{,}52 \cdot 92{,}5 \cdot 0{,}2 + 2.5^2 \cdot 0{,}3 = 94{,}375\ cm^3$$

Redondeando el error: ***ΔV=90 cm³***. A continuación redondeamos el volumen con el error redondeado ***V=580 cm³***. Por tanto, el resultado final es:

$$\boxed{V = \ 580 \pm 90 \quad \mathrm{cm}^3}$$



Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física

# Representaciones gráficas.

La representación de datos y resultados en gráficas cartesianas es una de las formas más comunes y útiles de visualizar los resultados. Para una correcta representación de los datos solo hay que seguir una serie de reglas sencillas.

**1.-** Siempre hay que indicar qué se representa en cada escala, junto con sus unidades.

**2.-** La escala elegida debe permitir una fácil lectura e identificación de los valores.

**3.-** Las ordenadas y abcisas pueden tener distintas escalas.

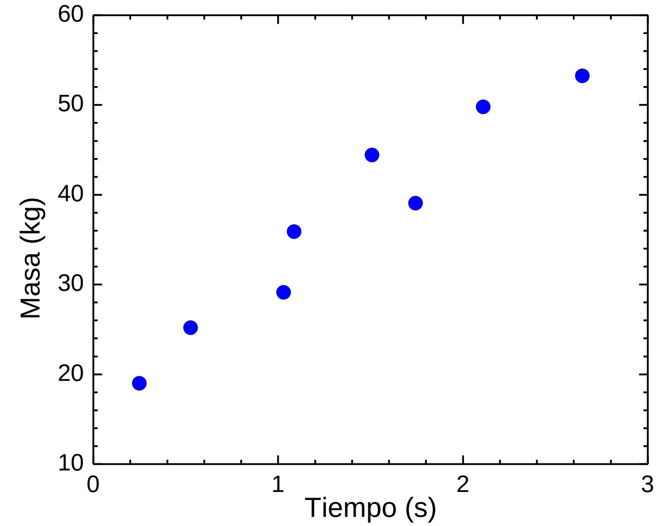
**4.-** Los puntos experimentales deben de ser claramente visibles.

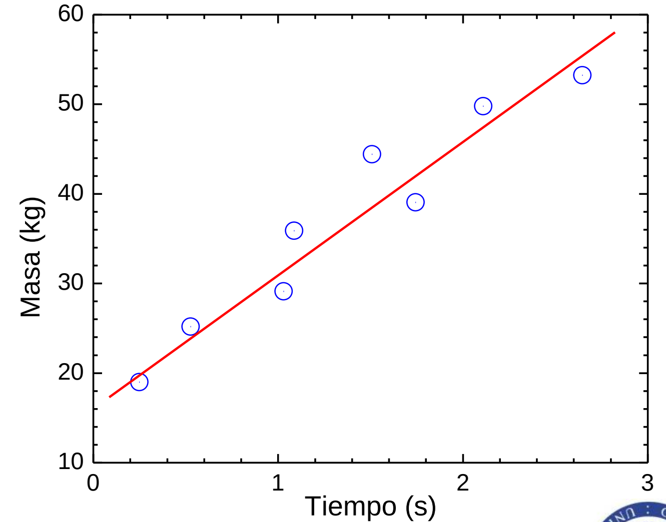
**5.-** Los ejes no tienen por qué empezar en el punto (0, 0).

**6.-** Las escalas de los ejes deben elegirse de forma que faciliten la representación gráfica, con los puntos experimentales lo más espaciados posibles.

**7.-** Si los puntos experimentales se ajustan a una curva, se dibujará sta con trazo continuo.

**8.-** Muy importante, al mirar la gráfica nos debe resultar agradable.



# Ajuste lineal de datos experimentales.

En muchos casos, las leyes físicas se pueden expresar mediante la ecuación de una recta, i.e., tienen una dependencia lineal. Un ejemplo es la velocidad en función del tiempo de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$v(t) = v_0 + at \text{ ; } a\text{=aceleración; } t\text{=tiempo; } v_0\text{=velocidad inicial.}$$

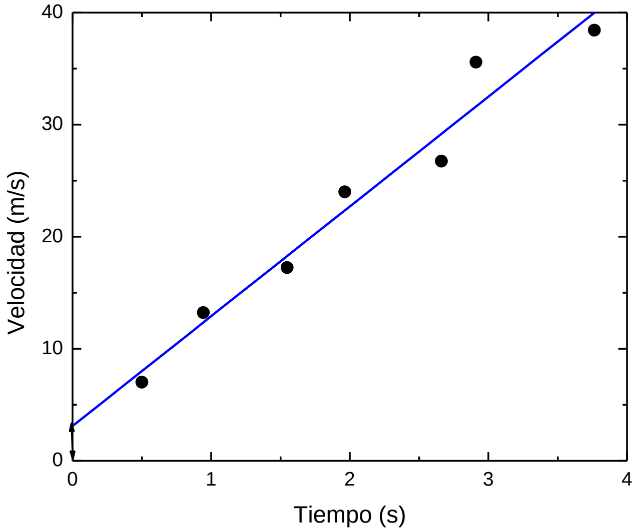
Esta ecuación coincide con la ecuación de una recta, donde:

$$y = b + m\,x$$

Donde **b** es la ordenada en el origen y ***m*** la pendiente de la recta.

$$\begin{cases} y = v \quad t = x \\ b = v_0 \quad m = a \end{cases}$$

Si medimos la velocidad ***v*** en función del tiempo ***t*** y representamos los datos experimentales (puntos de la gráfica), se dispondrán más o menos a lo largo de una recta. La ley física $v = \boldsymbol{v_0} + a\ t$ es la ecuación de una recta, y por tanto, si midiésemos perfectamente todos los puntos se dispondrían a lo largo de una recta. Esa recta es la que mejor ajusta a los puntos experimentales, y corresponde aproximadamente con la que trazaríamos como *mejor recta* entre las posibles (línea azul).




Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física

# Ajuste lineal de datos experimentales.

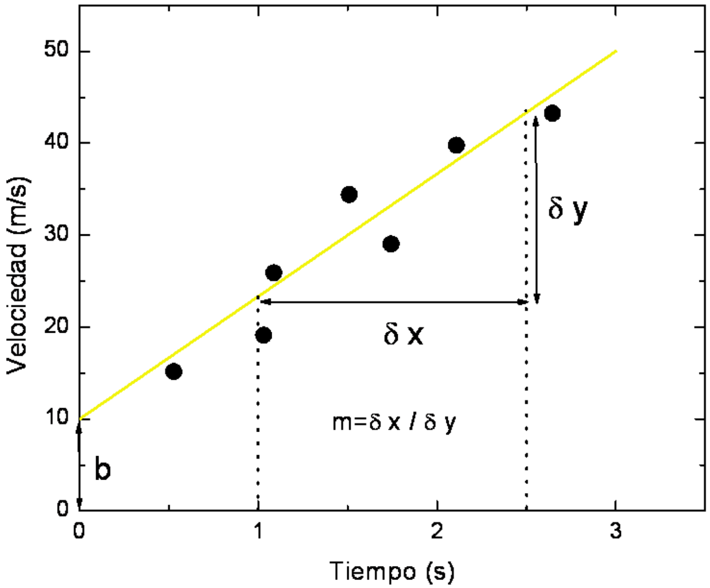
Si ajustamos los datos experimentales a la ley física:

$$v(t) = v_0 + at \text{ ; } a\text{=aceleración; } t\text{=tiempo; } v_0\text{=velocidad inicial.}$$

obtendremos la aceleración y la velocidad inicial. Para ello seguimos el siguiente procedimiento gráfico.

1.- Trazamos la recta que "a *ojo*" mejor ajusta a los datos experimentales.
2.- Identificamos qué magnitudes físicas corresponden a cada uno de los parámetros de la recta:

$$\mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{m\,x} \quad \begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{v} & \mathrm{t} = \mathrm{x} \\ \mathrm{b} = \mathrm{v}_0 & \mathrm{m} = \mathrm{a} \end{cases}$$




3.- Medimos en la gráfica la ordenada en el origen y calculamos la pendiente.
4.- Identificamos esos valores con las magnitudes físicas que se desean obtener, y obtenemos la ley física final.

$$v_0 = x_0 = 9 \ m/s \quad ; \quad a = m = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{20}{1,5} = 13,3 \ \ m/s^2 \quad \Rightarrow v(t) = 9 + 13,3 \ t$$

Miguel Ángel Monge
Dpto. de Física