Universidad
Carlos III de Madrid

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Curso Cero
Grado en Ingeniería Informática

Segunda Parte
Funciones elementales. Límites, continuidad y derivabilidad.

Juan Diego ÁLVAREZ ROMÁN
Manuel CARRETERO CERRAJERO
Pedro José HERNANDO OTER
Natalia IRISHINA
Jesús SALAS MARTÍNEZ
Eduardo Jesús SÁNCHEZ VILLASEÑOR (coordinador)

Grupo de Modelización, Simulación Numérica y Matemática Industrial
Universidad Carlos III de Madrid
Avda. de la Universidad, 30
28911 Leganés

Curso 2011/2012

Índice general

Capítulo 1

Funciones elementales

Una de la ideas fundamentales de las matemáticas es la de función. Sin entrar a dar una definición precisa, que ya ha sido discutida en el la primera parte del Curso Cero, podemos considerar que la cantidad y es función de la cantidad x, $y = f(x)$, si existe alguna regla, ley o procedimiento que permita asignar un valor *único* de y, para cada valor que se considere de x, dentro de cierto conjunto posible de valores. Muchas veces es posible expresar dicha regla o ley por medio de una ecuación matemática; otras veces es difícil o aún imposible hallar la fórmula matemática que relacione las variables x e y aunque siga siendo posible la asignación de un único valor de y para cada valor de x.

En este curso vamos a estudiar algunas de las principales característica de algunas funciones reales de variable real conocidas como *funciones elementales*. Usualmente, se entiende por función elemental una función construida a partir de la suma, resta, multiplicación, división y composición de un número finito de polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y sus inversas.

1.1. Polinómicas y racionales

1.1.1. Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas atienden a la forma general

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde las a_i son constantes, $a_n \neq 0$, y la máxima potencia a la que está elevada x determina el grado de la función polinómica (en adelante polinomio).

Seguidamente analizaremos algunos casos en función del grado (obviando el caso de grado 0 por tratarse de la función constante):

Grado 1:

Los polinomios de primer grado tienen por expresión general

$$P_1(x) = a_0 + a_1x,$$

aunque posiblemente estemos más habituados expresarlos en la forma $y = mx + n$. Reflejan un comportamiento lineal y su representación gráfica es una recta. El valor de m se conoce como *pendiente* e indica la inclinación de la recta y n nos indica el valor de y cuando la x es nula, de ahí su nombre *ordenada en el origen*.

Grado 2:

Los polinomios de grado 2,

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = c + bx + ax^2,$$

reflejan un comportamiento cuadrático y su representación gráfica es una parábola.

A la hora de caracterizar una parábola son varios los aspectos a tener en cuenta:

- Las ramas de la parábola irán en sentido positivo (hacia arriba) si el coeficiente que multiplica a x^2 es positivo y hacia abajo en el caso opuesto.
- El vértice de la parábola, el punto en el que se unen las dos ramas, está situado en $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.
- Una parábola puede tener como mucho dos puntos de corte con el eje X, en función del número de soluciones de la ecuación $c + bx + ax^2 = 0$.

En la Figura 1.1 se puede ver la representación gráfica de la parábola $y = x^2 - 2x + 3$.

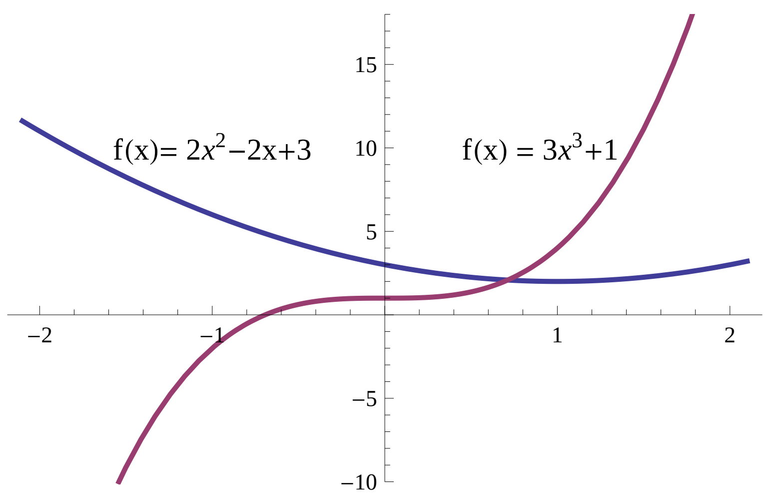

Figura 1.1: Representación gráfica de un polinomio de grado 2 (parábola) y otro de grado 3. Se puede apreciar como en este caso la parábola no tiene puntos de corte con el eje X. El polinomio cúbico sólo posee un punto de corte.

Grado n:

La caracterización de polinomios de grado superior a 2 exige, normalmente, un estudio más detallado que en los casos que acabamos de ver. No obstante, hay ciertas características generales a tener presente:

- $P_n(x)$ puede ser evaluado en cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir, su dominio es toda la recta real.
- Si representamos gráficamente cualquier polinomio P_n, su gráfica será una curva suave (veremos más adelante que los polinomios son derivables en todo su dominio).
- Dependiendo de si el grado del polinomio es par o impar podrá los valores de $P_n(x)$ se corresponderán con todos los puntos del eje Y o no.
- Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n puntos de corte con el eje X.

En la Figura 1.1 pueden apreciarse gráficamente algunas de las propiedades indicadas.

1.1.2. Funciones racionales

Una función racional es una función que se obtiene como cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}.$$

El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{x : Q_m(x) = 0\}$. Las funciones racionales son continuas y suaves en todo su dominio. En la Figura 1.2 hemos representado la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2},$$

en la cual se pueden apreciar las propiedades antes señaladas.

1.2. Potencias

Las funciones potencia atiende a la forma general de $f(x) = x^r$ donde r es un número real. Sin embargo, dependiendo del valor concreto de r, las funciones $x \mapsto x^r$ presentan comportamientos bien diferenciados. En el apartado anterior hemos tratado el caso sencillo en el que r es un número entero no negativo. En las Figuras 1.3 y 1.4 puede verse la diferencia de comportamiento según el exponente r sea positivo o negativo.

En el caso en que r sea un número racional, es decir $r = p/q$, la función potencia puede ser entendida como la raíz q-ésima de x elevada a p, es decir $f(x) = \sqrt[q]{x^p}$. En este caso, el dominio de la función depende de las paridades de q y p. En concreto, si p es impar y q es par, la variable x no puede tomar valores negativos. En la Figura 1.5 puede compararse el comportamiento de las gráficas de la funciones $x \mapsto x^p$ y $x \mapsto \sqrt[p]{x}$, con $p \in \mathbb{N}$. El caso en el r no es un número racional es, por lo general, más complicado por lo que dejaremos su estudio para más adelante.

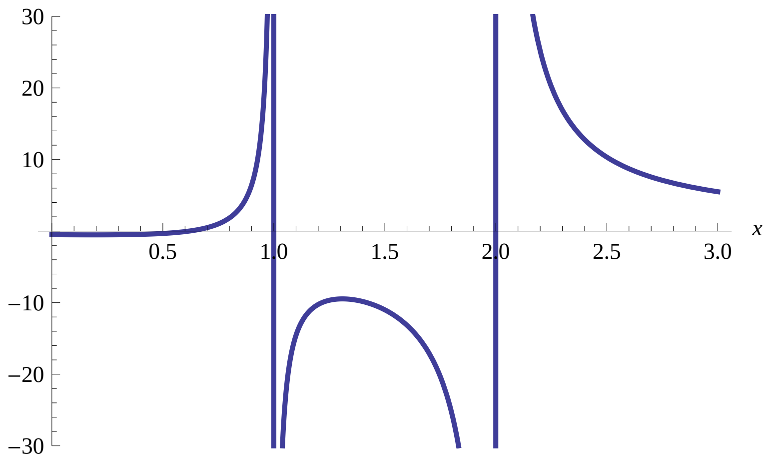

Figura 1.2: **Función racional.** Gráfica de $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 1)/(x^3 - 2x^2 - x + 2)$. En los puntos en los que se anula el denominador la función no está definida; el resto de puntos pertenecen al dominio y en todos ellos la gráfica de la función viene descrita por una curva suave.

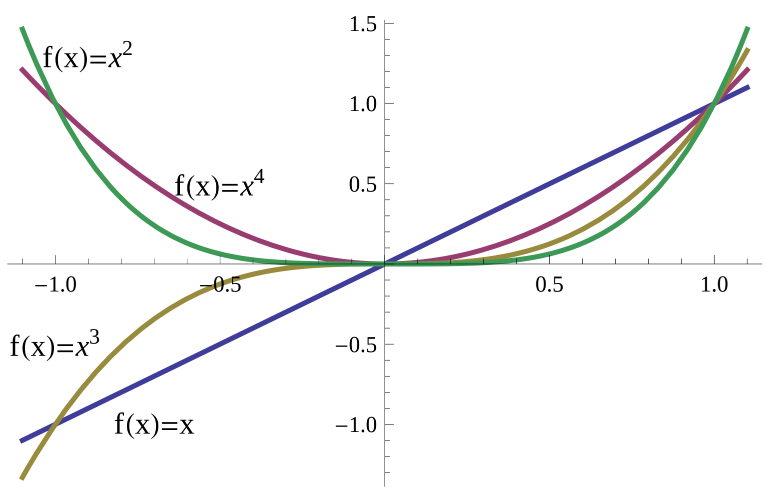

Figura 1.3: **Potencias enteras positivas.** Representación gráfica de distintas potencias positivas x^r con $r \in \mathbb{N}$.

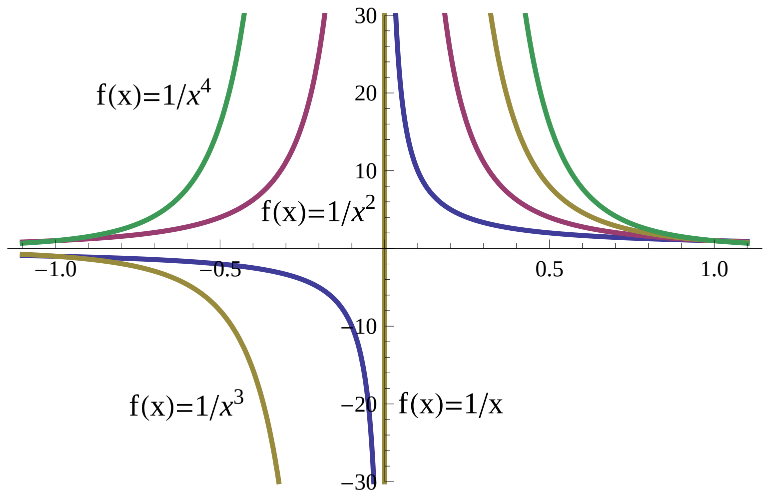

Figura 1.4: **Potencias enteras negativas.** Representación gráfica de distintas potencias negativas $x^{-r} = 1/x^r$ con $r \in \mathbb{N}$.

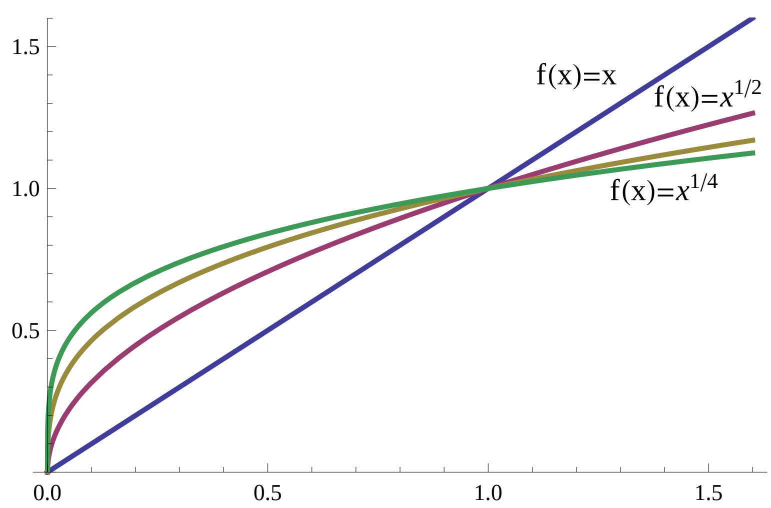

Figura 1.5: Potencias fraccionarias.Representación gráfica de distintas potencias fraccionaria o raíces.

1.3. Funciones trigonométricas directas e inversas

1.3.1. Funciones trigonométricas

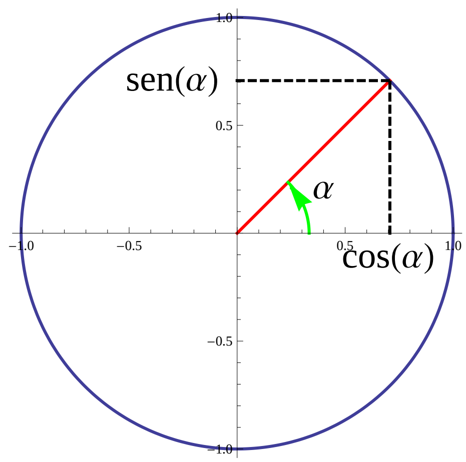

Figura 1.6: Definición geométrica del seno y coseno del ángulo α.

La definición geométricas del seno y el coseno en función de una variable angular $\alpha \in [0, 2\pi)$ se supone conocida por el alumno, recuérdese el clásico esquema mostrado en la Figura 1.6. Para dar sentido a las funciones seno y coseno [$\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$] en función de un número arbitrario $x \in \mathbb{R}$ basta asociar un ángulo con cada número real. Esta asociación se realiza de la siguiente forma: sobre la circunferencia de radio unidad, comenzando en el punto $(1, 0)$, y dependiendo del signo de x, se avanza una una longitud de arco igual a x en el sentido horario o antihorario. El ángulo así construido de denomina *ángulo de x radianes*. Como es bien sabido, si sobre una circunferencia de radio 1 se avanza una longitud de arco igual a 2π se vuelve al mismo sitio; razón por la que tanto el seno como el coseno son funciones periódicas de periodo 2π (ver Figura 1.7).

Son numerosas la propiedades que verifican las funciones seno y coseno, por lo que aquí recordaremos únicamente algunas de las más importantes:

- $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)\,,\ \cos(x) = \cos(-x)$.
- $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$.
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$.
- $\text{sen}(x + y) = \cos(x)\,\text{sen}(y) + \cos(y)\,\text{sen}(x)$.

El resto de las funciones trigonométricas se definen a partir de las dos anteriores como:

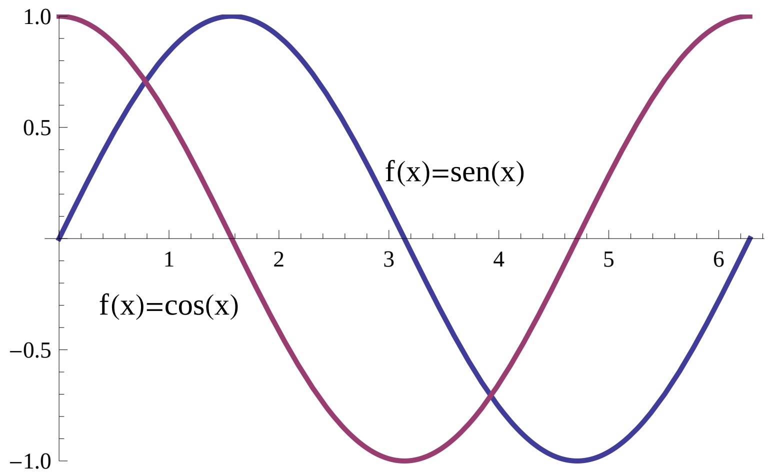

Figura 1.7: Funciones trigonométricas. Funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Ambas funciones son periódicas, con periodo 2π, y sus gráficas son idénticas salvo por una traslación de $\pi/2$ en la dirección del eje X.

- Función tangente: $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.
- Función cotangente: $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.
- Función secante: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
- Función cosecante: $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

1.3.2. Funciones trigonométricas inversas

Hemos definido las funciones trigonométricas como ciertos objetos que admiten como entrada el valor de un ángulo (digamos x) y nos devuelven, por ejemplo, el valor del coseno o del seno de dicho ángulo, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$. En lo que estamos interesados ahora es justo en lo inverso. Queremos definir, por ejemplo, una función a la que al proporcionarle como entrada el valor del coseno de un ángulo, nos devuelva el valor de dicho ángulo. Así aparecen las funciones trigonométricas inversas. Como es claro, existen tantas funciones trigonométricas inversas como funciones trigonométricas, no obstante nos fijaremos en las tres más importantes:

- La función inversa del seno es el arcoseno, $\operatorname{arc\,sen}(x)$.

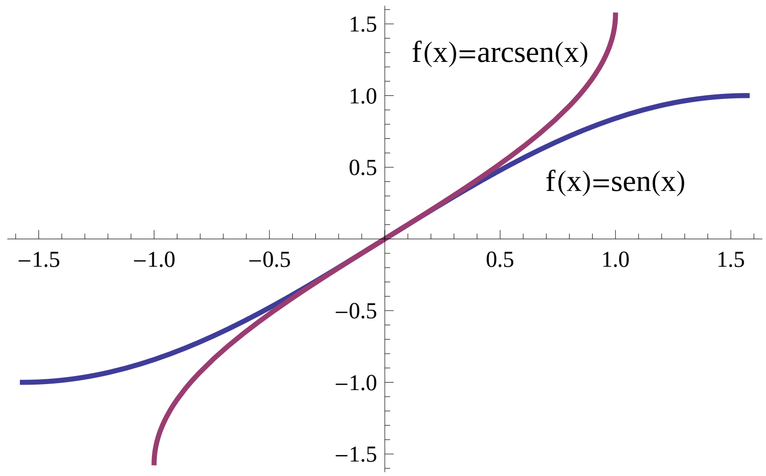

Figura 1.8: Función arcoseno. Gráfica de las funciones $\text{sen}(x)$ y su inversa $\arcsin(x)$. Observamos la similitud entre ambas así como las restricciones en el dominio de definición.

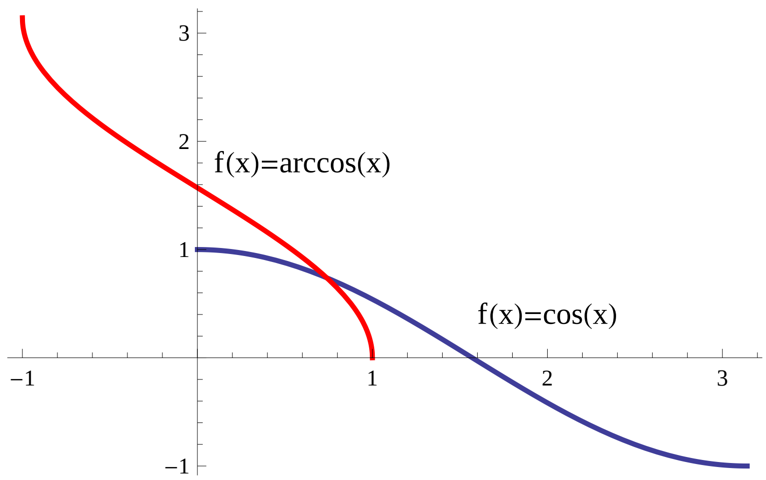

Figura 1.9: Función arcocoseno. Gráfica de las funciones $\cos(x)$ y su inversa $\arccos(x)$. Observamos la similitud entre ambas así como las restricciones en el dominio de definición.

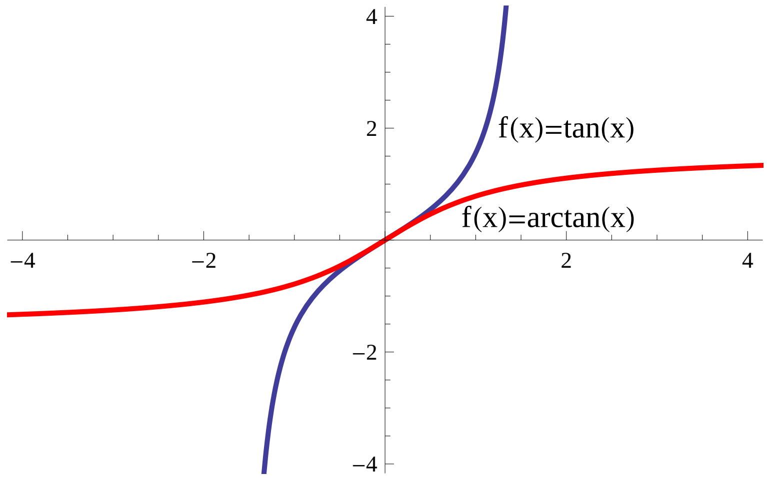

Figura 1.10: Función arcotangente. Gráfica de las funciones $\tan(x)$ y su inversa $\arctan(x)$.

- La función inversa del coseno es el arcocoseno, $\arccos(x)$.
- La función inversa de la tangente es la arcotangente, $\arctan(x)$.

Debemos tener presente que tanto la función arcoseno como la función arcocoseno no pueden ser evaluadas en puntos fuera del intervalo $[-1, 1]$. Preguntémonos, por ejemplo, qué sentido tiene buscar el ángulo cuyo seno vale 14. Este no es el caso de la arcotangente, que puede ser evaluada en cualquier punto de la recta real. Por otra parte, es bien sabido que para un valor determinado del coseno (o cualquier otra función trigonométrica) existen infinitos ángulos cuyo cosenos nos proporcionan dicho valor. Ahora bien, recordando lo indicado en la primera parte del Curso Cero, una función no puede ser multivaluada. Por esta razón, es necesario restringir el dominio de definición de las funciones trigonométricas directas para poder dar sentido a sus inversas.

En las Figuras 1.8, 1.9 y 1.10 están representadas las gráficas de las tres funciones arcoseno,arcocoseno y arcotangente. En dichas figuras se observa la relación que cada una de ellas tiene con su correspondiente función directa asociada.

1.4. Exponencial y logaritmo

1.4.1. Función exponencial

De forma general, la función exponencial puede escribirse como $f(x) = a^x$, donde a debe ser un número real positivo, conocido como base. En la Figura 1.11 está representado el comportamiento típico de la funciones exponenciales y se pueden apreciar las siguientes propiedades:

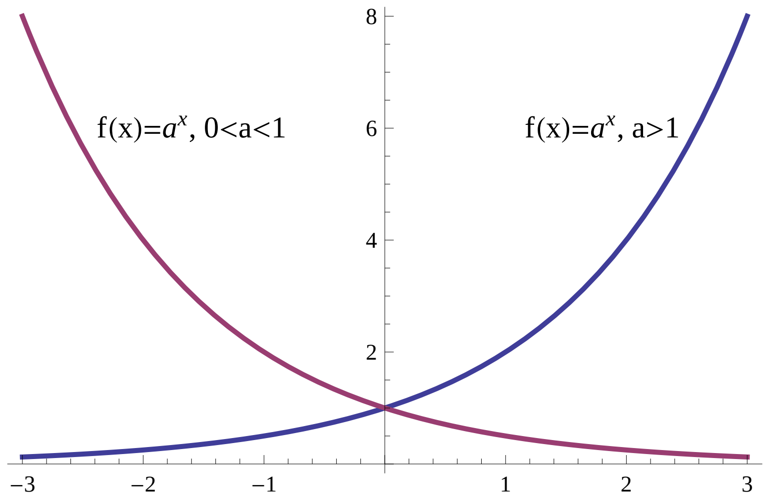

Figura 1.11: **Función exponencial.** Comportamiento de la función exponencial en función de la base.

- La función exponencial puede ser evaluadas en cualquier número real, es decir, su domino es toda la recta real.
- $f(x) = a^x$ es siempre una función positiva, $a^x > 0$.
- Si la base es mayor que 1 ($a > 1$) la función siempre crece tanto como queramos sin más que aumentar el valor de x. Cuando $a < 1$, a^x tiende a 0 cuando x crece.
- Si $0 < a < b$ entonces: $a^x < b^x$ si $x > 0$ y $b^x < a^x$ si $x < 0$.
- Dado un número real $y > 0$, existe un único número real x tal que se cumple $y = a^x$. A dicho x se conoce como **logaritmo en base $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{y}$**, en símbolos $x = \log_a(y)$.

Nota: Sin duda alguna, la base más importante de las funciones exponenciales la proporciona el número irracional $e = 2{,}71828\cdots$. En lo sucesivo, si no se especifica lo contrario, al hablar de función exponencial nos referiremos a $f(x) = \exp(x) = e^x$.

1.4.2. Función logaritmo

En el apartado anterior ya hemos introducido la función logaritmo en base a, $\log_a x$, como la función inversa de la función exponencial de la misma base, a^x. Si nos fijamos en la Figura 1.12 podremos apreciar la relación que guardan las gráficas de ambas funciones. Usando las propiedades de la función exponencial es posible deducir las propiedades del logaritmo. Algunas de las más importantes son:

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

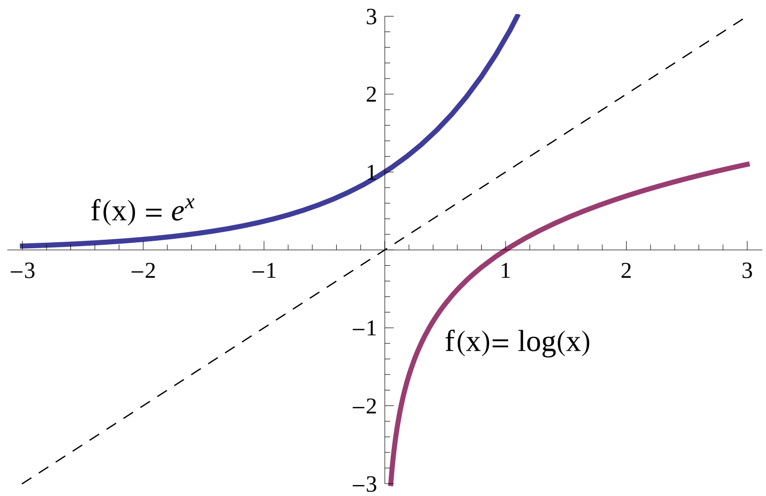

Figura 1.12: Funciones logaritmo y exponencial.

- $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$
- Puesto que el logaritmo es la inversa de la exponencial, la imagen de la función logaritmo coincide con toda la recta real.

Nota: De igual forma que sucede con la función exponencial, cuando no se especifica la base de un logaritmo por regla general se sobrentiende que se trabaja con logaritmos en base e, también conocidos como logaritmos naturales o neperianos. El logaritmo natural se representa usualmente mediante $\ln x$ ó $\log x$.

1.5. Ejercicios propuestos

1. Indica algún ejemplo de función matemática que no pueda ser expresada como una ecuación o fórmula elemental.
2. En unos mismos ejes coordenados, dibuja las siguientes rectas: $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = -x$ e $y_4 = x + 1$.
3. Supón que conoces cómo es la gráfica de la recta $y = \alpha x + \beta$, ¿qué podrías decir de la gráfica de
$$y = -\frac{\alpha}{2}x + 2\beta\,?$$
4. Indica la pendiente y ordenada en el origen de una recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(1, 1/2)$.

5. Escribe la ecuación de una parábola, que tenga un solo punto de corte con el eje X y pase por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.
6. Determina las característica de la parábola $y = x^2 - 3x + 2$. Esboza la gráfica.
7. Supongamos dos móviles que se siguen la siguientes ecuaciones de movimiento: $s_1(t) = 34t + 45$ y $s_2(t) = 3t^2 - t + 12$, con $t \geq 0$. Cuál de los dos móviles llega antes a $s = 354$.
8. ¿Es cierto que, independientemente del grado, pueden existir polinomios que no posean ninguna raíz? Razona la respuesta.
9. Determina si la siguiente afirmación es cierta: si $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}$ entonces $f_1(x) = f_2(x)$.
10. Explica cómo esbozarías la gráfica de $f(x) = \sqrt[p]{x}$ conociendo la de $g(x) = x^p$.
11. Conociendo la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, ¿podrías dibujar la de la función $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x + \pi/3)$?
12. Esboza la gráfica de la función tangente.
13. Esboza la gráfica de la función logaritmo con base menor que 1.
14. Dibuja de forma precisa la gráfica de la función
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}.$$
15. Explica si es cierto que las funciones $f_1(x) = \log \dfrac{1-x}{x-1}$ y $f_2(x) = \log(1-x) - \log(x-1)$ son iguales.
16. Prueba que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
17. Prueba que $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.
18. Expresa la función valor absoluto en términos de funciones elementales.

Capítulo 2

Límites, continuidad y derivabilidad

En este capítulo analizaremos algunos aspectos relacionados con el cálculo elemental de límites de funciones. Puesto que el alumno ya está familiarizado con el concepto y cálculo de límites, aquí nos limitaremos a resumir brevemente lo visto en cursos previos, dejando la definición rigurosa y sus implicaciones para el curso de Cálculo de Grado. Detrás de la aparentemente sencilla idea de límite se halla, sin duda, uno de los conceptos más importantes de la matemática, origen de lo que se conoce como *Cálculo Infinitesimal.*

2.1. Noción intuitiva del límite de una función

Diremos que l es el límite de la función $f(x)$ cuando la variable independiente x tiende al punto x_0, y lo escribiremos de la forma

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$

cuando es posible acercar el valor de $f(x)$ tanto como queramos a l, sin más que aproximar x suficientemente a x_0 (con $x \neq x_0$). Es importante destacar que en la definición anterior no importa lo que le sucede a la función f justo en el punto x_0 en el que se calcula el límite (ver la Figura 2.1).

Una de las principales consecuencias de la definición de límite es el hecho de que si una función tiene límite en un punto x_0, este límite es único (la Figura 2.2 muestra un caso en el que no existe el límite). Aún en el caso en el que la función no tenga límite, puede que nos interese estudiar el comportamiento de una función a ambos lados del punto x_0. En este caso estaremos ante los llamados **límites laterales** (ver Figura 2.3):

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ límite por la derecha ($x > x_0$),
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ límite por la izquierda ($x < x_0$).

A veces estamos interesados en conocer hacia qué valor tiende una determinada función cuando la variable independiente se hace *infinitamente* grande. Hablaremos entonces de

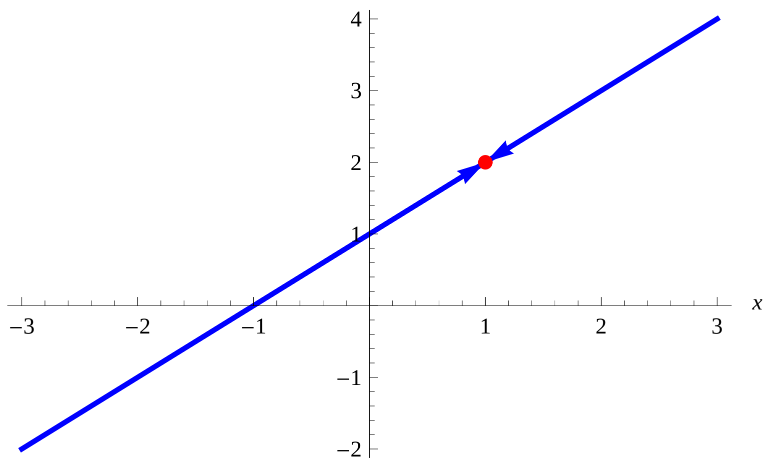

Figura 2.1: **Límite de una función.** Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Observamos como la función no existe en $x = 1$ pero, sin embargo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

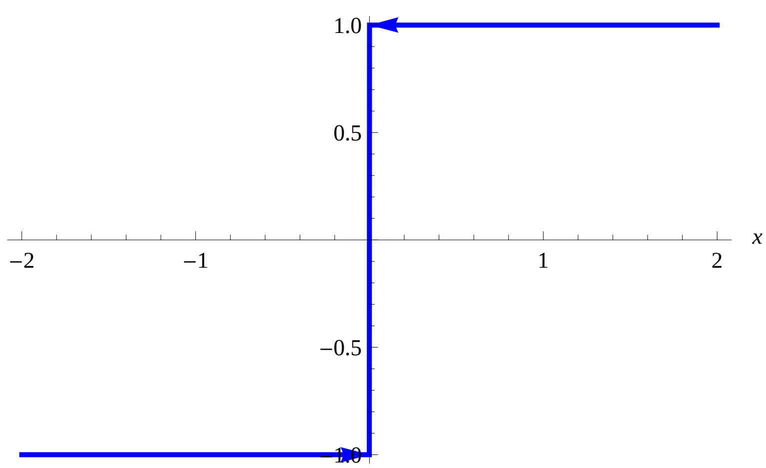

Figura 2.2: N**o existencia del límite.** Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Observamos cómo la función no está definida en $x = 0$ ni tampoco existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

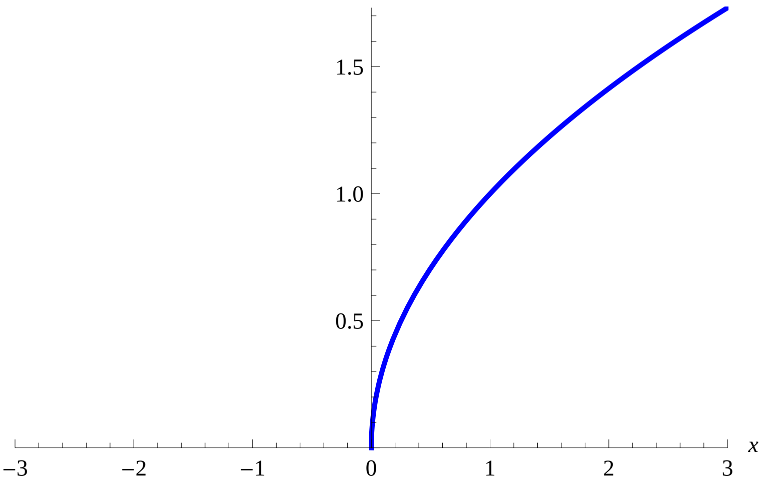

Figura 2.3: **Límites laterales.** Representación gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de f es el intervalo $[0, \infty)$. En particular observamos que la función está bien definida en $x = 0$ aunque no está definida para $x < 0$. En este caso el límite $x \to 0$ debe entenderse como el límite lateral por la derecha.

límites en el infinito (ver Figura 2.4). La notación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

indica que el valor de la función $f(x)$ puede acercarse tanto como queramos al valor l si más que elegir un x suficientemente grande. De igual forma se puede definir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Puede que al acercar x a un cierto punto x_0 los valores de una función se haga *infinitamente* grandes. Hablaremos entonces de *límites infinitos* (ver Figura 2.5). La notación

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

indica que los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes como queramos sin más que acercar x al punto x_0.

2.2. Propiedades de los límites

Algunas de las propiedades útiles para el cálculo de límites son:

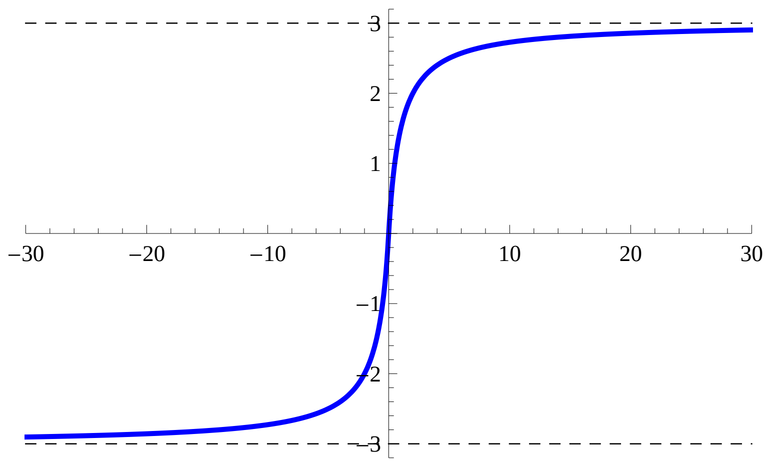

Figura 2.4: **Límite en el infinito.** Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x}{|x|+1}$. Como se puede apreciar conforme x se hace más grande la función se acerca más a 3

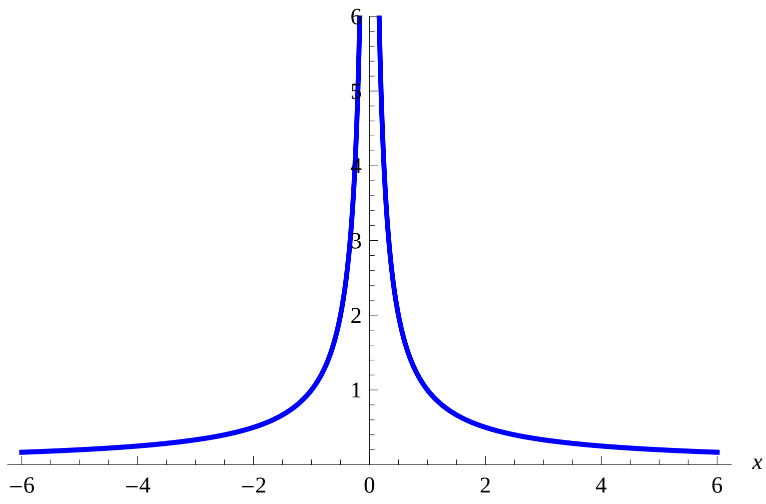

Figura 2.5: **Límite infinito.** Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$. Como se puede apreciar conforme x tiende a 0, el valor de $f(x)$ es positivo y puede hacerse tan grande como queramos.

- Linealidad: $\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) + \beta \lim_{x\to x_0} g(x)$.
- Producto: $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.
- Cociente: $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.
- Regla del *sandwich*: si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$, entonces, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Si bien las propiedades anteriores son muy útiles para el cálculo de límites, existen ocasiones en las que no pueden ser utilizadas, por encontrarnos frente a las llamadas *indeterminaciones*: límites que, existiendo en algunos casos, no pueden ser calculados aplicando las propiedades algebraicas del cálculo de límites. Profundizaremos más sobre esto último en el siguiente apartado, cuando veamos algunos ejemplos de cálculo de límites.

2.3. Ejemplos de cálculo de límites

La casuística en el cálculo de límites es enorme por lo que no pueden establecerse, de manera general, procedimientos estándares que permitan calcularlos. No obstante, en esta sección, y a modo de ejemplos, veremos cómo calcular algunos límites sencillos. Se deja para los cursos del Grado la utilización de otras técnicas más poderosas (desarrollos en serie de Taylor, etc.).

- $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{sen}(x)+2x^3}{\tan(2x)-e^x}$

  Tal y como se puede apreciar, en este caso, todas la funciones pueden ser evaluadas en el punto $\pi/2$. Además, en dicho punto el denominador no es nulo por lo que podemos calcular el valor del límite sin más que hacer uso de las propiedades del apartado anterior, es decir:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}(x)+2x^3}{\tan(2x)-e^x} = \frac{\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{sen}(x)+2(\lim_{x\to\pi/2} x)^3}{\lim_{x\to\pi/2}\tan(2x)-\lim_{x\to\pi/2} e^x}\,.$$

  Así pues, tenemos que

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}(x)+2x^3}{\tan(2x)-e^x} = \frac{1+2(\frac{\pi}{2})^3}{-e^{\pi/2}}\,.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+3x^3}{2x^2+4x}$

  Nos encontramos ante un límite en que se ven involucradas distintas potencias que se anulan cuando $x \to 0$. Démonos cuenta de que no podemos aplicar directamente la técnica usada en el ejemplo anterior, pues se anula el denominador. Debemos extraer dicho cero y para ello basta sacar factor común y simplificar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+3x^3}{2x^2+4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1+3x^2)}{x(2x+4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1+3x^2}{2x+4}\,.$$

  Procediendo ahora de igual forma que en el apartado anterior tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+3x^3}{2x^2+4x} = \frac{1}{4}\,.$$

- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4}$

  En este caso nos encontramos ante un límite en el infinito en el que se ven involucradas distintas potencias. Al igual que sucedía en el ejemplo anterior, no podemos hacer uso de la propiedades de los límites porque su uso nos conduce a una expresión del tipo ∞/∞ que no está bien definida. En este caso las potencias dominantes serán las de mayor orden. Así pues, procediendo de igual forma que en el ejemplo anterior, tenemos

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x+3}{2x^2+4} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2(1+1/x+3/x^2)}{x^2(2+4/x^2)} = \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

  Fijémonos que en este caso el denominador se anula en el punto $x = 1$, por lo que no podemos utilizar las propiedades de los límites. Procedemos de igual forma que en ejemplos anteriores, extraemos dicho cero y obtenemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+3x}\right)$

  Nos encontramos ante un límite en el que el primer tanteo nos conduce a una expresión del estilo $\infty - \infty$ que no está bien definida. Por otra parte, la aparición de raíces cuadradas nos impide simplificar esta expresión. Estos problemas pueden ser resueltos haciendo uso del conjugado:

$$\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+3x}\right) = \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+3x}\right) \frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}\,.$$

Operando tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+3x}\right)\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}\,.$$

Procediendo de igual forma que en el tercer ejemplo obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0\infty}\frac{x^2-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x(\sqrt{1}+\sqrt{1+3/x})}=-\frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$

  Estamos ante un límite en que tenemos una base que tiende a 1 y un exponente que lo hace a infinito. En principio, no podemos aventurar cuál va a ser el comportamiento de la función para x haciéndose suficientemente grande. Para resolver este tipo de límites suele ser útil tener presente la definición del número e:

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\,.$$

  Intentemos asemejar el límite propuesto al que define el número e. En primer lugar arreglemos la base

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{3x^2}\,.$$

  Ahora el exponente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{3x^2\frac{x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right)^{\frac{3x^2}{x^2+1}}\,.$$

  Si renombramos como $x'=x^2+1$, está claro que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=\lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}=e\,.$$

  Por otra parte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+1}=3\,,$$

  por lo que podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}=e^3\,.$$

2.4. Ejercicios propuestos

1. Evalúa $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{3x-4}$.

2. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(e^x)-\ln x}{\sqrt[3]{x^2-3}}$.

3. ¿Hacia dónde tiende la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$ cuando x se hace suficientemente grande?

4. ¿Hacia dónde tiende la función $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$ cuando x se acerca a 3 por la derecha y por la izquierda?

5. Calcula el siguiente límite $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+5x-2}{3x^2-2x-8}$.

6. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{(1/2)^x}$.

7. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{(1/2)^x}$.

8. Evalúa $\displaystyle\lim_{x\infty}\frac{x^3+\operatorname{sen}(e^x)}{\arctan x+4x^3}$.

9. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+x-5}\right)$.

10. Evalúa $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{x+4}$.

11. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}\right)$.

12. Evalúa $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$.

13. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\tan x}$.

14. Evalúa $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{\frac{3x^2}{x+4}}$.

2.5. Continuidad y derivabilidad

2.5.1. Continuidad

Definición: Se dice que la función f es continua en un punto x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observación: Comprobar la continuidad de una función en un punto x_0 implica hacer un determinado límite. En algunos casos puede resultar conveniente realizar el estudio de los límites laterales. Estos límites dan lugar a la definición de *continuidad por la derecha* y de *continuidad por la izquierda*.

Ejercicio: Define la continuidad por la derecha y por la izquierda de una función.

2.5.2. Concepto de derivada

Definición: Se dice que la función f es derivable en el punto x_0 si existe (y es finito) el siguiente límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Observación: Calcular la derivada de una función en un punto x_0 consiste en hacer un determinado límite en dicho punto. Al igual que en el caso de la continuidad, el estudio de los límites laterales da lugar a la definición de *derivada por la derecha*, que se representa por $f'(x_0^+)$, y de *derivada por la izquierda*, que se representa por $f'(x_0^-)$.

Ejercicio: Define $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$.

Interpretación geométrica de la derivada: En la siguiente página web del Ministerio de Educación de España se pueden ver gráficos interactivos que ilustran los conceptos de recta tangente, pendiente de la recta tangente e interpretación geométrica de la derivada.

`http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_geometrica_de_la_derivada/unidad1.htm`

Se insta al estudiante a que utilice los *applets* de Java de la página anterior para refrescar las ideas intuitivas de los conceptos que allí se muestran.
Geométricamente, el número real $f'(x_0)$ es igual a la *pendiente* de la *recta tangente* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. La ecuación de dicha recta tangente es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3x^2 + 1$, calcularemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de dicha función en el punto $x_0 = 2$. Aplicando la definición de la derivada de el punto $x_0 = 2$ es fácil probar que $f'(2) = 12$. Dado que $f(2) = 13$, se tiene que la ecuación de la recta tangente es: $y = 13 + 12(x - 2)$.
Se insta al alumno a que dibuje las gráficas de la función f y de la recta tangente para que visualice lo que acaba de hacer analíticamente.

2.5.3. Propiedades fundamentales

Relación entre la derivada y la continuidad: *Si una función f es derivable en un punto x_0 entonces f es continua en x_0.*

El estudiante debe tener cuidado y no usar mal la propiedad anterior ya que hay funciones continuas en un punto que no son derivables en dicho punto, por ejemplo la función $f(x) = |x|$ en el punto $x_0 = 0$.

Función derivada: Se dice que la función f es derivable en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ si f es derivable en todos los puntos del intervalo I.
Si una función f es derivable en un intervalo I entonces podemos definir una nueva función, que llamaremos *función derivada*, y la representaremos con el símbolo f'.

Ejemplo: La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es derivable en $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ y su función derivada es la función $f'(x) = \cos(x)$, definida también en todo $\mathbb{R}$.

Reglas de derivación: Con objeto de poder calcular funciones derivadas de una forma rápida y eficiente, se obtienen unas fórmulas, llamadas *reglas de derivación* (su deducción puede consultarse en cualquier libro de Matemáticas de Bachillerato de la modalidad de Ciencias). Aquí incluimos una tabla (no exhaustiva) que puede servir al estudiante para repasar dichas reglas y como referencia a la hora de realizar ejercicios de derivación.

Observación: En las siguientes fórmulas se entiende que la validez de las mismas viene dada en el dominio que corresponda.

Suma: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Producto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Potencia: $(f^k)'(x) = kf^{k-1}(x)f'(x)\,, \quad k \in \mathbb{R}$.

Trigonométricas: $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)\,, \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x).$

Funciones arco: $\operatorname{arc\,sen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Exponenciales: $\exp'(x) = \exp(x)\,.$
$\exp_a'(x) = \exp_a(x)\log(a)$ dónde $\exp_a(x) = a^x$, con $a \in (0, +\infty)$.

Logarítmicas: $\log'(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad \log_a'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\log a}\,,\ a \in (0, +\infty).$

Aplicaciones de la derivada: Son muchas las aplicaciones de la derivada. Dado el nivel de este curso, las aplicaciones más inmediatas se recordarán y usarán en la siguiente sección dedicada a la representación gráfica de funciones. Aquí únicamente repasaremos una de las aplicaciones de la derivada que más utilizan los alumnos de Bachillerato. Nos referimos a la Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

Regla de L'Hôpital: Sean f y g dos funciones que verifican una de las dos siguientes hipótesis:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty,$

entonces, si existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\,.$$

Observación: En la regla anterior, x_0 puede ser un número real o bien $\pm\infty$.

2.5.4. Ejercicios propuestos

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x^4+3}.$
2. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$
3. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{5/3}.$
4. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$

5. $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^5)$.
6. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x^2}{10}\right)$.
7. $f(x) = \arctan(x^2+1)$.
8. $f(x) = (\arctan(x^2+1))^2$.
9. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
10. $f(x) = \log\left(\log\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

2.6. Representación gráfica de funciones

Este tema es una buena oportunidad para repasar las propiedades elementales de las funciones. Las propiedades básicas que habitualmente se estudian antes de trazar la gráfica de una función son:

1. Dominio.
2. Cortes con los ejes.
3. Simetrías.
4. Periodicidad.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
7. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Seguidamente haremos un breve resumen dichos puntos, destacando lo que el estudiante debe recordar.

1. Dominio: El dominio de una función es el conjunto de números para los que la función está definida. Para estudiar el dominio el estudiante debe repasar las propiedades de las funciones elementales. Se recomienda tener especial cuidado con las funciones logarítmicas, que contengan raíces de índice par y las definidas como cocientes. Las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 muestran ejemplos que ilustran lo expuesto.

2. Cortes con los ejes:

Cortes con el eje X: se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

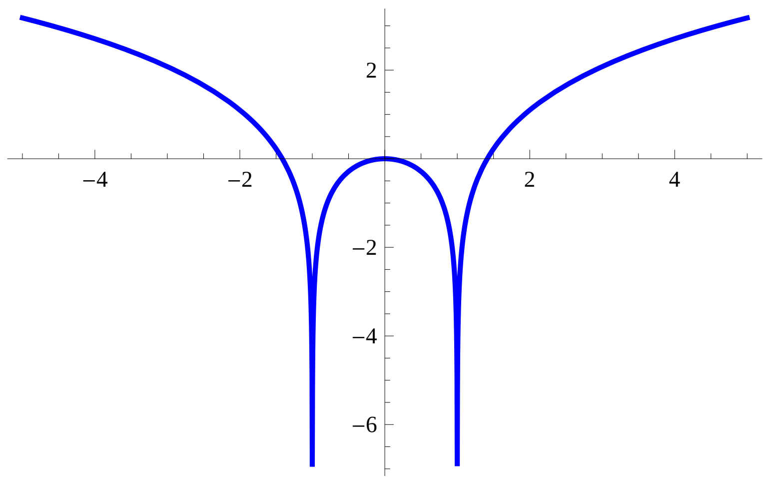

Figura 2.6: **Gráfica de la función $f(x) = \log|x^2 - 1|$**. Nótese que los puntos $x = \pm 1$ no pertenecen al dominio de la función. La gráfica tiene cortes con el eje X y con el eje Y.

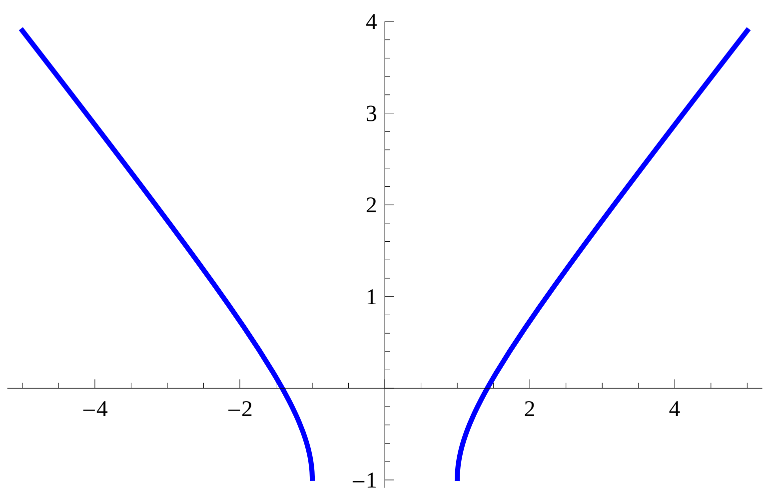

Figura 2.7: **Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$**. Nótese que los puntos del intervalo $(-1, 1)$ no pertenecen al dominio de la función. La gráfica corta al eje X pero no al eje Y.

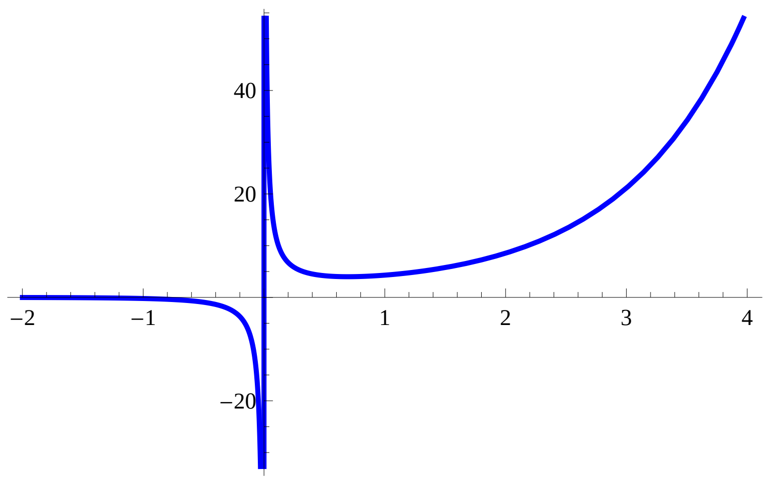

Figura 2.8: **Gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = e^{2x}/(e^x - 1)}$**. Nótese que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de la función. La gráfica no corta al eje Y.

Cortes con el eje Y: si 0 pertenece al dominio de f entonces se calcula $f(0)$.

Las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 ilustran lo expuesto.

3. Simetrías:

Respecto al eje Y *(funciones pares)*: se debe verificar que $f(-x) = f(x)$, con x perteneciente al dominio de f.

Respecto al origen $(0, 0)$ *(funciones impares)*: se debe verificar que $f(-x) = -f(x)$, con x perteneciente al dominio de f.

El estudiante debería cuestionarse por qué no tiene sentido estudiar simetrías de *funciones* respecto al eje X. Las Figuras 2.9 y 2.10 ilustran lo expuesto.

4. Periodicidad: Normalmente el alumno lo estudiará este apartado cuando analice funciones trigonométricas. No obstante hay que considerar en general la posibilidad de que la función bajo estudio sea periódica, esto es, que cumpla $f(x + T) = f(x)$ para un cierto $T > 0$ y toda x perteneciente al dominio de f. Al valor más pequeño de $T > 0$ para el cual se cumple la condición $f(x+T) = f(x)$ se le denomina **periodo**. Recuérdese que las funciones seno y coseno son periódicas de periodo $T = 2\pi$. La función tangente tiene periodo $T = \pi$. La Figura 2.11 muestra un ejemplo de función periódica trigonométrica.

5. Asíntotas:

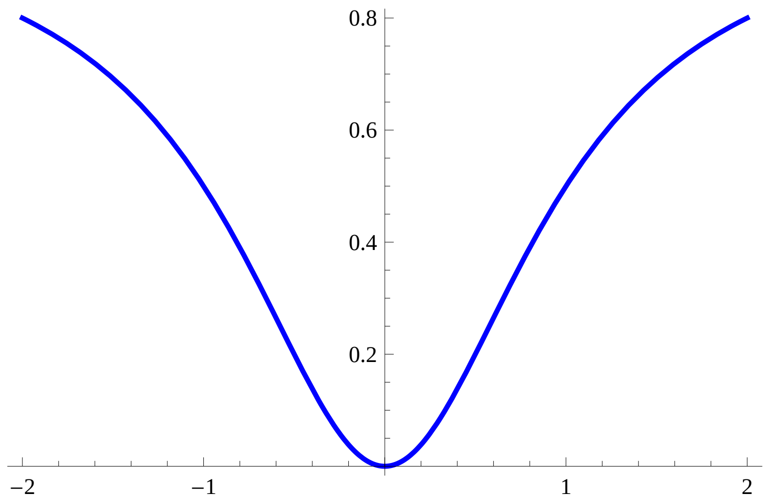

Figura 2.9: Gráfica de la función $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$. Nótese que la función es par.

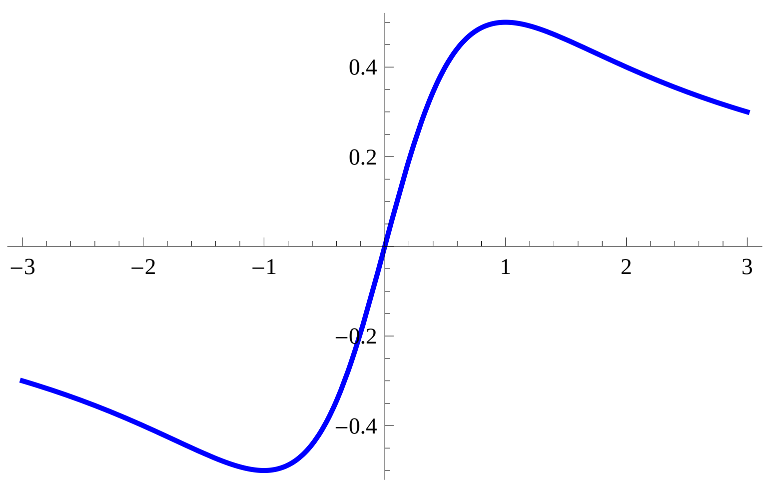

Figura 2.10: Gráfica de la función $f(x) = x/(x^2 + 1)$. Nótese que la función es impar.

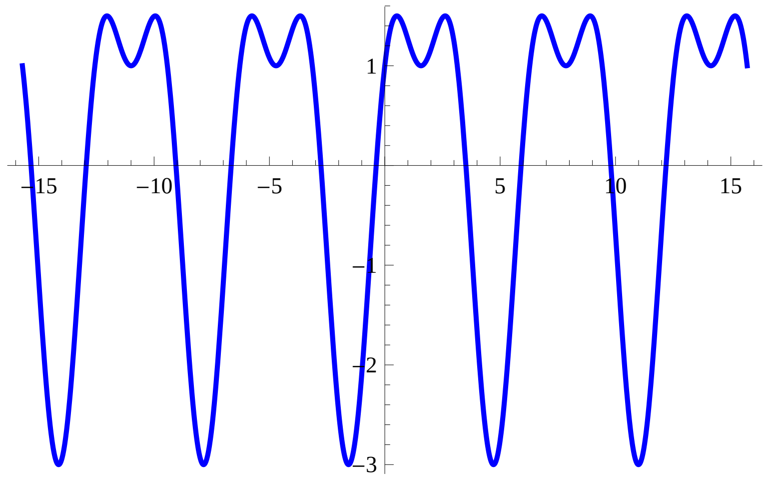

Figura 2.11: Gráfica de la función $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)+\cos(2x)$. Nótese que la función es periódica con periodo 2π.

Asíntotas verticales: tienen por ecuación $x = a$, dónde el número a no pertenece al dominio de f y debe verificarse que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o bien $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Asíntotas horizontales: tienen por ecuación $y = k$. Debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$.

Asíntotas oblicuas: Tienen por ecuación $y = mx+n$, con $m \neq 0, n \in \mathbb{R}$. Los valores de m y n se deducen a partir de las siguientes fórmulas: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$.

Las Figuras 2.12 y 2.13 muestran ejemplos de lo expuesto.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos: Para hallar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente se tienen en cuenta las siguientes aplicaciones de la primera derivada de una función:

Crecimiento: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si f es derivable y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.

Decrecimiento: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si f es derivable y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.

Extremos: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si f es derivable en $x_0 \in I$ y x_0 es un punto de máximo o mínimo local de f en I, entonces $f'(x_0) = 0$.

Gracias a estas propiedades se pueden localizar con cierta facilidad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Además, si en las fronteras de dichos intervalos se

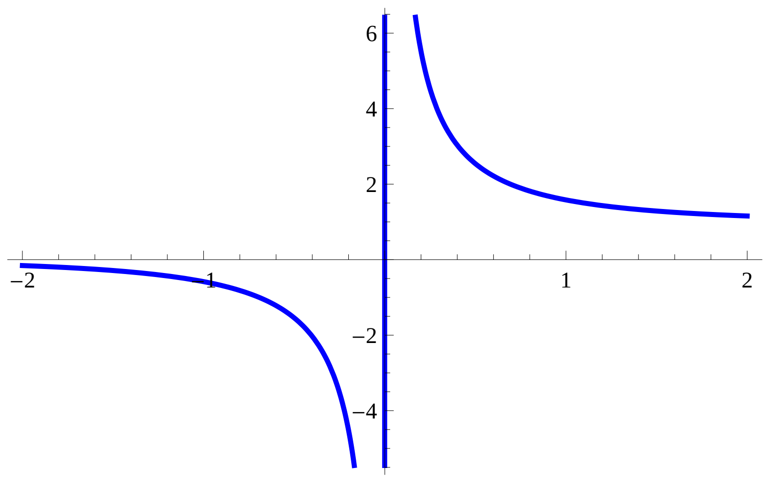

Figura 2.12: **Gráfica de la función $f(x) = e^x/(e^x - 1)$.** Las rectas $y = 0$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales.

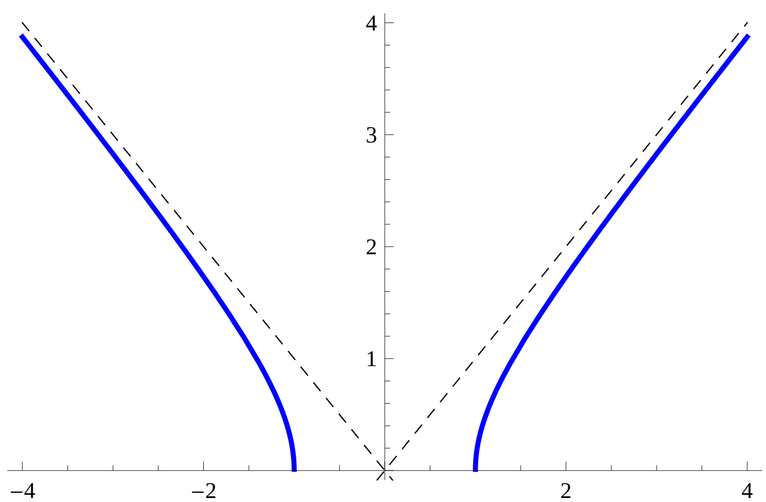

Figura 2.13: **Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.** La función posse dos asíntotas oblicuas $y = \pm x$.

anula la derivada primera de f podemos analizar si dichos puntos son puntos de máximo, mínimo o bien no hay extremo local de la función.

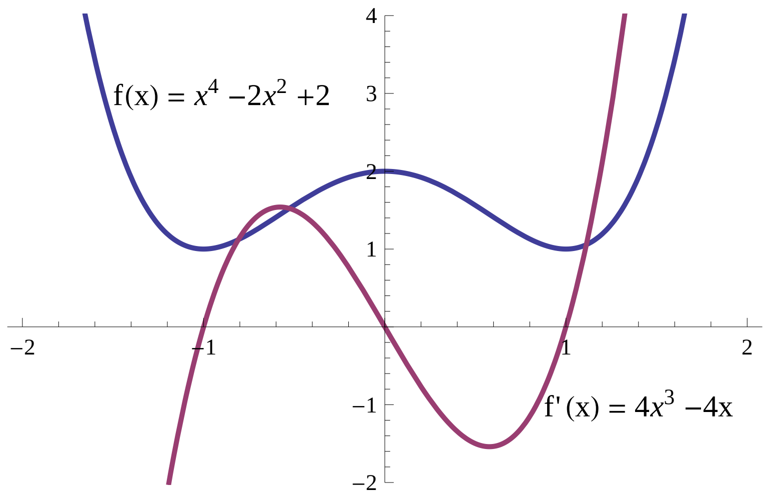

Figura 2.14: Gráficas de la función $f(x) = x^4 - 2x + 2$ y de su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

La Figura 2.14 muestra un ejemplo en el que se comparan las gráficas de f' y f con objeto de visualizar las tres propiedades de la derivada primera que hemos escrito más arriba.

7. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Para hallar los intervalos en los que una función es cóncava o convexa, se tienen en cuenta las siguientes aplicaciones de la derivada segunda de una función:

Convexidad: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si f es dos veces derivable y $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I (esto quiere decir que la gráfica de f se curva de forma análoga a como lo hace la gráfica de la parábola $y = x^2$).

Concavidad: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si f es dos veces derivable y $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I (esto quiere decir que la gráfica de f se curva de forma análoga a como lo hace la gráfica de la parábola $y = -x^2$).

Puntos de inflexión: sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, si f es dos veces derivable en $x_0 \in I$ y x_0 es un punto de inflexión de f en I, entonces $f''(x_0) = 0$.

Gracias a estas propiedades se pueden localizar con cierta facilidad los intervalos de concavidad y convexidad de una función. Además, si en las fronteras de dichos intervalos se anula la derivada segunda de f podemos analizar si dichos puntos son o no de inflexión.
La Figura 2.15 muestra un ejemplo en el que se comparan las gráficas de f'' y f, con objeto de visualizar las tres propiedades de la derivada segunda que hemos escrito más arriba.

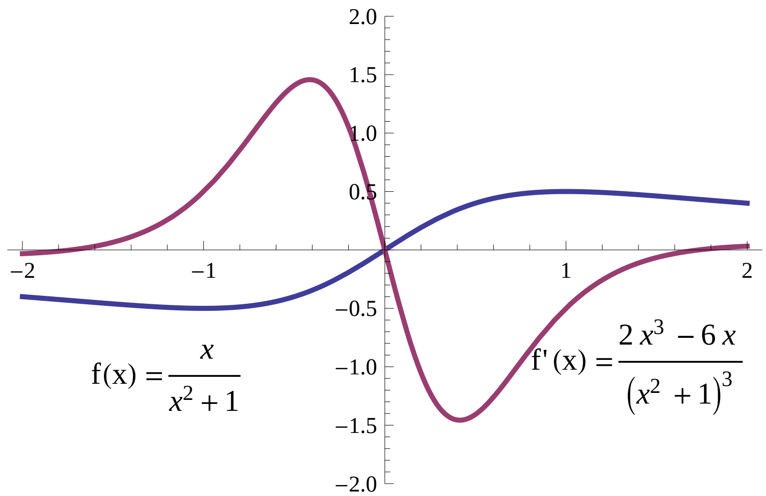

Figura 2.15: Gráficas de la función $f(x) = x/(x^2+1)$ y de su segunda derivada $f''(x) = (2x^3-6x)/(x^2+1)^3$.

Observación: Aquellos alumnos que tengan mucha destreza calculando derivadas sucesivas de una función pueden seguir el siguiente teorema que permite determinar los puntos de máximo, mínimo y puntos de inflexión.

1. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$ entonces se verifica que:
   - Si $f''(a) > 0$ entoces $f(x)$ tiene un punto de mínimo relativo en $x = a$.
   - Si $f''(a) < 0$ entoces $f(x)$ tiene un punto de máximo relativo en $x = a$.
2. Si $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ se verifica que:
   - Si n es par:
     - Si $f^{(n)}(a) > 0$ entoces $f(x)$ tiene un punto de mínimo relativo en $x = a$.
     - Si $f^{(n)}(a) < 0$ entoces $f(x)$ tiene un punto de máximo relativo en $x = a$.
   - Si n es impar (y mayor o igual que 3) entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Ejercicio. Se recomienda a los estudiantes que apliquen las propiedades descritas en este apartado y que intenten reproducir las gráficas de las numerosas funciones representadas a lo largo de la memoria.