
Funciones exponenciales y logarítmicas

1.- Funciones exponenciales y sus gráficas

Un terremoto de 8.5 grados en la escala de Richter es 100 veces más potente que uno de 6.5, ¿por qué?, ¿cómo es la escala de Richter?

Definición 1 (Función exponencial)

La función f es una *función exponencial de base a* si es de la forma

$$f(x) = a^x,$$

con $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.

¿Qué significa exactamente a^x si x no es racional? Sabemos que, por ejemplo,

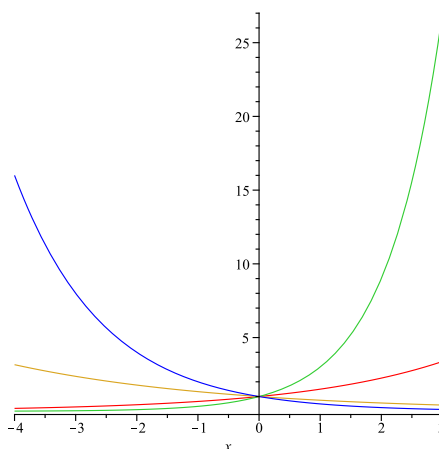
$$2^{3/2} = \sqrt{2^3}, \quad 2^{p/q} = \sqrt[q]{2^p},$$

pero, ¿cómo se calcula $2^{\sqrt{3}}$? Aunque no es el objetivo de este curso, basta con saber que cualquier número real, por ejemplo $\sqrt{3}$ se puede aproximar tanto como queramos por una sucesión de números racionales. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccc} 2^{1.732} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1.733} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2^{1.732050} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1.732051} \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

1.1. Propiedades

- $a^x > 0$ para todo x ,
- $a^0 = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, para $a > 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, para $0 < a < 1$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $a^x = a^y \iff x = y$.



Ejercicio 1 Utilizando las propiedades 5 y 6 demostrar que

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

La propiedad 8 es especialmente útil para resolver ecuaciones que involucren exponenciales:

Ejemplo 2 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $2^x = 8,$

Como $8 = 2^3$ se tiene que tener $x = 3.$

2. $4^{x-3} = 8,$

La idea para resolver este tipo de ecuaciones es escribir todos los términos con la misma base, en este caso 2. Para ello se usan las propiedades de las funciones exponenciales,

$$4^{x-3} = (2^2)^{x-3} = 2^{2(x-3)} \quad \text{y} \quad 8 = 2^3,$$

por tanto tenemos que resolver

$$2(x - 3) = 3, \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 3 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $27^{x+1} = \frac{1}{9},$

2. $4^{x+2} = 8^x,$

3. ${}^{2x-1}\sqrt{3^{x-3}} = \sqrt{27}.$

1.2. La base natural e

Hoy en día, la base 2 tiene mucha importancia en aplicaciones informáticas; sin embargo en muchas aplicaciones la opción más útil para base es el número irracional e:

Definición 2 (El número e)

El límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

existe y se designa por e. Al número e se le llama *base exponencial natural*.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718280469
↓	↓
∞	e

1.3. Aplicaciones

El interés compuesto

Supongamos que un capital P inicial se invierte a una tasa de interés compuesto anual i acumulable una vez al año. Si el interés se suma al capital al final del año, el balance nuevo, P_1 es

$$P_1 = P + Pi = P(1 + i).$$

Al comienzo del segundo periodo se invierte un capital $P_1 = P(1 + i)$ y al cabo de otro año el balance es

$$P_2 = P_1 + P_1 i = P_1(1 + i) = P(1 + i)^2.$$

De forma recurrente se obtiene el capital final transcurridos t años

$$P_t = P(1 + i)^t.$$

Imaginemos ahora que consideramos incrementos de interés más frecuente, trimestral, por ejemplo. Sea a el número de periodos al año en el que se abonan los intereses (4, en el caso de trimestral), t el número de años. La tasa de incremento es i/a y el por tanto, el saldo en la cuenta después de t años es

$$A = P \left(1 + \frac{i}{a} \right)^{at}. \quad (1)$$

Si a aumenta ilimitadamente el proceso conduce al *interés compuesto*. Si en la fórmula (1) denotamos $n = i/a$ obtenemos

$$\begin{aligned} A &= P \left(1 + \frac{i}{a} \right)^{at} \\ &= P \left(1 + \frac{i}{ni} \right)^{nit} \\ &= P \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{nit} \\ &= P \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{it}. \end{aligned}$$

Si n aumenta indefinidamente (tomar el límite cuando n tiende a infinito). Se concluye que la fórmula del interés compuesto es

$$A = Pe^{it}.$$

Ejercicio 4 Invertimos 12000€ a una tasa de interés anual del 9%. Calcular el saldo después de 5 años si el incremento es

1. trimestral
2. mensual
3. diario
4. continuo

2.- Funciones logarítmicas y sus gráficas

Definición 3 (Función logarítmica)

Decimos que y es el logaritmo en base a de x si

$$y = \log_a x \quad \iff \quad x = a^y,$$

donde $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, d La función dada por

$$f(x) = \log_a x$$

se denomina función logarítmica de base a .

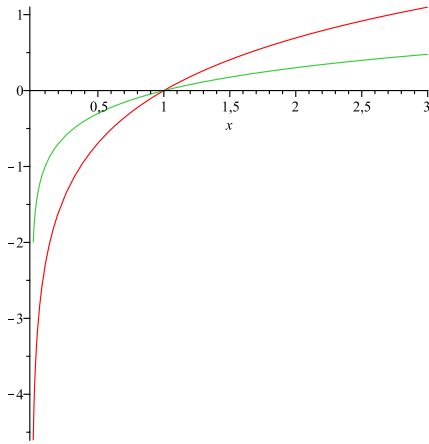
es decir, y es el número al que hay que elevar a para obtener x .

$$2 = \log_4 16 \text{ es equivalente a } 4^2 = 16$$

Al igual que sucede con las funciones exponenciales, hay una función “especial”: el *logaritmo neperiano o natural*. Decimos que y es el logaritmo neperaiano de x si

$$y = \log_e x = \ln x.$$

2.1. Propiedades



1. $\log(1) = 0$,
2. $\log_b b = 1$ para todo b ,
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$
4. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,
5. $\log(a^x) = x \log(a)$,
6. $\log_a(a^x) = x$,
7. $\log_a x = \log_a y \iff x = y$.

Ejercicio 5 A partir de las propiedades 4 y 5 demostrar

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ejemplo 6 Escribir $\ln 6$ en términos de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Como $6 = 2 \cdot 3$, utilizando la propiedad del producto para logaritmos, tenemos

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3.$$

Ejemplo 7 Escribir, en forma abreviada la expresión

$$\frac{1}{2} \ln x + 3 \ln(x + 1).$$

Utilizamos las propiedades de los logaritmos

$$\frac{1}{2} \ln x + 3 \ln(x + 1) = \ln x^{1/2} + \ln(x + 1)^3 = \ln(x^{1/2}(x + 1)^3).$$

Ejercicio 8 Desarrollar la expresión logarítmica

$$\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7}.$$

3.- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

A la hora de resolver ecuaciones que involucran exponenciales y logaritmos hay dos estrategias fundamentales

1. Propiedades una a uno:

$$\begin{aligned} a^x &= a^y & \iff & & x &= y, \\ \log x &= \log y & \iff & & x &= y. \end{aligned}$$

2. Propiedades inversas:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{y} \quad \log_a a^x = x.$$

Ejemplo 9 Resolver la ecuación $e^{-4x-4} = e^{x^2}$.

Utilizando la propiedad uno a uno de las exponenciales tenemos que

$$-4x - 4 = x^2 \iff x^2 + 4x + 4 = 0 \iff (x + 2)^2 = 0 \iff x = -2.$$

Ejemplo 10 Resolver la ecuación $3e^{2x} + 5 = 11$.

En primer lugar despejamos el término e^{2x} . Obtenemos

$$e^{2x} = \frac{11 - 5}{3} = 2,$$

y utilizando la propiedad de funciones inversas, es decir, tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación

$$\ln(e^{2x}) = 2x = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ejercicio 11 Resolver la ecuación $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Ejemplo 12 Resolver la ecuación $4 + 3 \ln(2x) = 6$.

En primer lugar despejamos el término $\ln(2x)$. Obtenemos

$$\ln(2x) = \frac{6 - 4}{3} = \frac{2}{3}$$

y utilizando la propiedad de funciones inversas, es decir, tomando exponenciales en ambos lados de la ecuación

$$e^{\ln(2x)} = 2x = e^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{e^{2/3}}{2}.$$

Ejercicio 13 Se depositan 1000€ en una cuenta de ahorro que genera 4% de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tarda en duplicarse la inversión?

Cristina Brändle Cerquiera
Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería
Universidad Carlos III de Madrid

