Universidad Carlos III de Madrid

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRICA

CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y TRANSFORMADORES

JUAN CARLOS BURGOS

TEMA 1: REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

ÍNDICE TEMA 1.

REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

1.1.POR QUÉ ES NECESARIO HACER UN REPASO DEL MAGNETISMO ………….…… 3
1.2. MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. UNIDADES …………………………………………………………………………………………… 3
1.3. ECUACIONES QUE RIGEN LA CREACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS Y ELÉCTRICOS …………………………………………………………………………………………..……8
1.4. DUALIDAD ENTRE ELECTRCIDAD Y MAGNETISMO ……………………………….……17
1.5. INDUCTANCIAS PROPIAS Y MUTUAS …………………………………………………... 19
1.6. MATERIALES FERROMAGNÉTICOS ….……………………………………………….... 21
1.7. ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO ……………………………... 23
1.8. POTENCIA REACTIVA ………………………………………………………………….... 28
1.9. EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EN FUNCIÓN DE LAS INDUCTANCIAS PROPIAS Y MUTUAS ……………………….... 29

TEMA 1
REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

1.1. POR QUÉ ES NECESARIO HACER UN REPASO DEL MAGETISMO

En las máquinas eléctricas los diferentes arrollamientos están aislados entre sí. Sin embargo, en este tipo de máquinas se transmite una energía desde unos devanados a otros (o al eje, en el caso de máquinas rotativas) ¿cómo se transmite la energía si los devanados están aislados? Se transmite a través del campo magnético (en este sentido, las máquinas eléctricas deberían llamarse en realidad máquinas magnéticas). Ello justifica un estudio del magnetismo.

1.2. MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. UNIDADES

MAGNITUDES ELÉCTRICAS

La primera magnitud con la que nos encontramos en electricidad es la carga eléctrica, que se mide en Coulombios (símbolo C).

Cuando se tienen dos cargas eléctricas próximas, una carga ejerce una fuerza sobre la otra, que es proporcional a la carga de cada una e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Si el medio es el vacío

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad (1.1)$$

Donde u_r es el vector unitario en la dirección de la línea que une las dos cargas y ε_0 es la permitividad del vacío ($\varepsilon_0=10^{-9}/(9\cdot 4\cdot \pi)$). Como se puede ver, la fuerza es un vector, porque tiene módulo, dirección y sentido

Campo eléctrico y rigidez dieléctrica

Se denomina campo eléctrico a la fuerza que experimenta una carga eléctrica de valor unitario

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} \qquad (1.2)$$

El campo eléctrico se mide en N/C, pero es más frecuente utilizar el V/m (voltio dividido entre metro), como luego se verá.

Cuando se aplica un campo eléctrico a un medio material, aparece una circulación de cargas

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (1.3)$$

Donde σ es la conductividad (cuya inversa es la resistividad ρ, que se mide en Ωm) y J la densidad de corriente, cuyas unidades son A/m^2 (amperios por metro cuadrado). Valores habituales de la densidad de corriente en un conductor son 1-3 A/mm^2.

La ecuación anterior es más conocida por los alumnos en su versión macroscópica que dice

$$U = RI \qquad (1.4)$$

Conocida como Ley de Ohm, en la que R es la resistencia al paso de corriente del elemento, U la tensión aplicada al mismo e I la intensidad que circula a través del mismo.

En los materiales conductores la conductividad es muy elevada, y es suficiente aplicar un campo eléctrico reducido para que exista una circulación de cargas eléctricas. Por el contrario, en los materiales aislantes, la conductividad es muy reducida (resistividad elevada), por lo que para los campos eléctricos de valores moderados la circulación de corriente es prácticamente nula.

Sin embargo, si se toma un material aislante (también llamado dieléctrico) y se va aumentando progresivamente el campo eléctrico, llega un momento que se produce un arranque de electrones de los átomos y de forma brusca comienza a circular corriente. Se denomina Rigidez Dieléctrica de un aislante al valor del campo eléctrico preciso para que se produzca la ruptura dieléctrica. Para el caso de líquidos, la rigidez dieléctrica se mide mediante un chispómetro, que es una pequeña cuba en la que hay unos electrodos con una forma normalizada separados una distancia también normalizada. Se va aumentando la tensión aplicada a una velocidad establecida por las normas hasta que salta el arco eléctrico. La rigidez dieléctrica se toma como promedio entre el campo eléctrico preciso para hacer saltar el arco en seis ensayos. Los aislantes líquidos son regenerables, pues basta con remover el líquido para dispersar las partículas quemadas para que el líquido vuelva a ser aislante. Por el contrario, la ruptura dieléctrica de un dieléctrico sólido es irreversible, y cuando se produce el aislante queda inservible.

La unidad de medida habitualmente utilizada para la rigidez dieléctrica es kV/mm. El aire limpio y seco a 20ºC de temperatura y presión atmosférica tiene una rigidez dieléctrica de 30 kV/cm. Los aceites minerales aislantes tienen una rigidez dieléctrica que supera 220 kV/cm cuando están nuevos y secos.

Cuando se disponen varios dieléctricos entre dos placas conductoras paralelas a las que se aplica una diferencia de potencial (figura 1.1), el campo eléctrico no se reparte de forma uniforme. En uno cualquiera de los medios (llamémosle x) se verifica

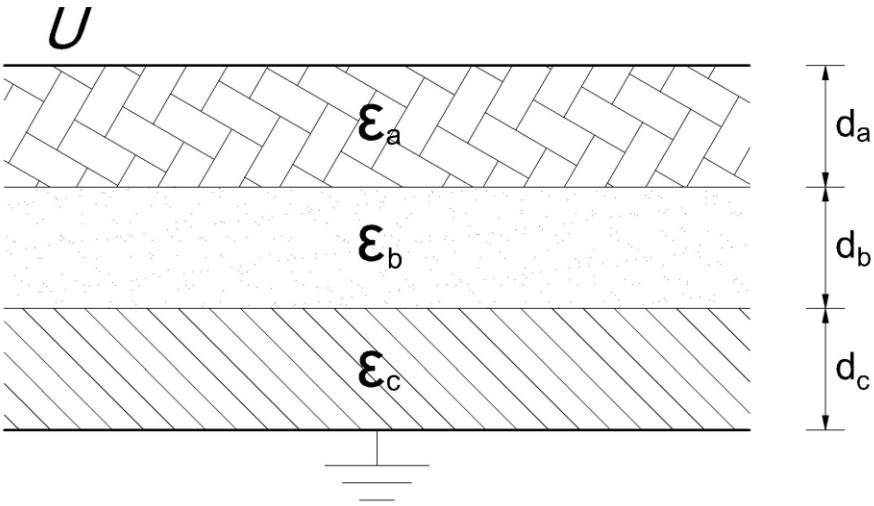


Figura 1.1: Reparto del campo eléctrico entre varios dieléctricos

$$E_x = \frac{U}{\varepsilon_x \cdot \left(\frac{d_a}{\varepsilon_a} + \frac{d_b}{\varepsilon_b} + \frac{d_c}{\varepsilon_c} \right)} \qquad (1.5)$$

Donde ε_x es la permitividad relativa del medio en cuestión, y d_x su espesor.

Como se puede ver, el campo eléctrico se reparte de forma inversamente proporcional a la permitividad de cada medio.

Si los medios son, por ejemplo, el papel, el aire y el aceite mineral (figura 1.2), las permitividades relativas son

εr: 2,2 para el aceite
3,7 para los papeles aislantes
1 para el aire

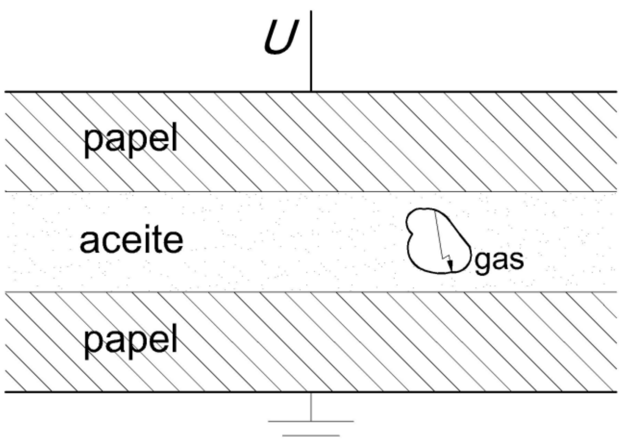


Figura 1.2 Generación de una descarga parcial en un equipo eléctrico

Por tanto, el aire es el medio que está sometido a un mayor campo eléctrico. Ahora bien ¿puede el aire soportar ese campo eléctrico? Como se indicó anteriormente, la capacidad para soportar un campo eléctrico sin que se produzca la ruptura dieléctrica depende de la rigidez dieléctrica, y de los tres medios el aire es el que menor rigidez dieléctrica tiene[1]. Debido a ello, si el campo eléctrico es suficientemente intenso se produce una pequeña descarga eléctrica en ese medio. Esa descarga no irá de un electrodo al otro, sino que se establece entre dos puntos de la pared de la burbuja gaseosa. Debido a que el arco no va de electrodo a electrodo, sino que sólo afecta a una parte del aislante, a este efecto se le denomina "descarga parcial".

Potencial eléctrico

Como se ha indicado, el campo eléctrico es la fuerza que experimenta una carga unitaria positiva.

Se denomina diferencia de potencial a la energía que hay que comunicar a una carga unitaria positiva para moverla contra el campo

$$u = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (1.6)$$

Dado que el trabajo es el producto escalar de la fuerza por la distancia, el potencial eléctrico es un escalar. La unidad de medida de la diferencia de potencial es el voltio (V). En ingeniería, a la diferencia de potencial se le suele denominar tensión.

MAGNITUDES MAGNÉTICAS

Cuando se aplica a un cuerpo una fuerza *F* éste adquiere una aceleración *a*. Una misma fuerza aplicada a dos cuerpos diferentes provoca aceleraciones diferentes. Lo mismo pasa cuando se aplica una tensión a una impedancia, aunque la tensión aplicada a dos impedancias diferentes sea idéntica, la intensidad que circula es distinta. En todos los campos de la física hay que distinguir la causa del efecto. Esto mismo ocurre en un material magnético. Por tanto se hace preciso diferenciar la causa (el campo magnético aplicado, H) del efecto (la inducción, B).

El campo magnético se mide en amperios-vuelta por metro, pero dado que la vuelta no es una unidad física, las unidades correctas son amperios/metro (A/m). En algunos libros, especialmente libros traducidos del inglés, a la inducción B se la llama campo magnético, pero eso no es del todo correcto (el nombre correcto es campo magnético de inducción) y hay que tener cuidado al expresarse, ya que una expresión incorrecta podría confundirse en un examen con un grave error de concepto. En otros libros a la inducción magnética se le llama *densidad de flujo*. La inducción B se mide en Teslas (T). La inducción magnética y el campo magnético son diferentes en cada punto del

[1] La rigidez dieléctrica del aire limpio y seco y a temperatura y presión de referencia es de 30 kV/cm. La rigidez dieléctrica del papel está alrededor de 60 kV/mm y la regidez dieléctrica del aceite es aproximadamente 300 kV/cm

espacio (definido por sus coordenadas x, y, z) y en cada instante de tiempo (t). Ambas magnitudes son magnitudes vectoriales. La relación entre B y H es

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (1.7)$$

Donde μ es la permeabilidad[2].

La permeabilidad de un material magnético se puede expresar como producto de la permeabilidad del vacío por la permeabilidad relativa.

$$\mu = \mu_0 \mu_r \qquad (1.8)$$

La permeabilidad del vacío vale $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$.

La permeabilidad es diferente para cada material magnético, pero en esta asignatura sólo consideraremos dos tipos de materiales, los materiales ferromagnéticos (que tienen una permeabilidad relativa muy elevada, del orden de centenas o millares) y los no ferromagnéticos (en los cuales consideraremos que la permeabilidad relativa es 1). Como veremos posteriormente, la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos no es constante.

El flujo magnético es el número de líneas de inducción que atraviesan una superficie.

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \qquad (1.9)$$

El flujo se mide en Weber (Wb). Como se indicó, en la literatura anglosajona, es frecuente denominar a la inducción “densidad de flujo”.

Al provenir de un producto escalar, el flujo es una magnitud escalar. El flujo hace relación a una superficie, por lo tanto no tiene sentido hablar de flujo en un punto. A pesar de ello, en muchos documentos técnicos se puede encontrar la expresión “el flujo en este punto…” (expresión, evidentemente incorrecta).

Para acabar con el resumen de magnitudes magnéticas, merece la pena citar el potencial vector magnético A, que no tiene sentido físico, pero que resulta útil matemáticamente a efectos de plantear y resolver ecuaciones magnéticas, pues en ocasiones las ecuaciones que proporcionan el campo magnético en un punto se pueden condensar utilizando el potencial vector. El potencial vector es la fuente de la inducción.

$$\vec{B} = rot \vec{A}$$

[2] Es importante no confundir su nombre con el de la permitividad ε. La permitividad relaciona la excitación (desplazamiento eléctrico, D) con la respuesta (campo eléctrico E) en electrostática ($D=\varepsilon E$).

1.3. ECUACIONES QUE RIGEN LA CREACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS Y ELÉCTRICOS

LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones que rigen la creación de los campos magnéticos y eléctricos. En este sentido, estas ecuaciones proporcionan (entre otras) la información de cómo se puede crear un campo magnético y cómo se puede crear un campo eléctrico.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1.10)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1.11)$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad (1.12)$$

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (1.13)$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de carga (C/m^3) y el resto de las magnitudes ya han sido presentadas.

Los operadores divergencia y rotacional de un campo vectorial cualquiera (llamémosle G) son

$$div\vec{G} = \vec{\nabla}\cdot\vec{G} \qquad (1.14)$$

$$rot\vec{G} = \vec{\nabla}x\vec{G} \qquad (1.15)$$

Donde, en coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.16)$$

En las ecuaciones (1.14) y (1.15), el producto escalar de dos vectores se ha denotado mediante "·", mientras que el producto vectorial se ha denotado como "x".

Para eliminar el operador divergencia de una ecuación, es posible utilizar el teorema de Gauss-Ostrogradski, que dice que si se toma un volumen en el espacio (figura 1.3), la integral de la divergencia de un vector en dicho volumen es numéricamente igual al número de líneas de dicho vector que escapan de dicho volumen (esto es, su flujo)

$$\iiint div\vec{G}\ dv = \iint \vec{G}\cdot d\vec{s} \qquad (1.17)$$

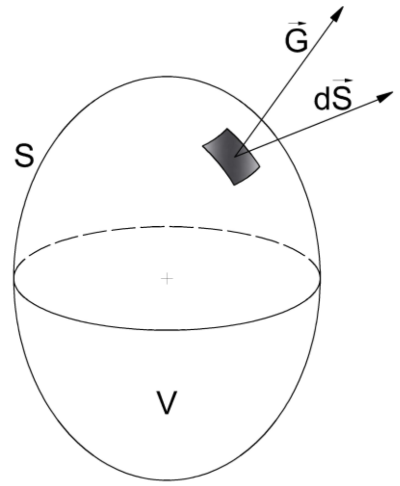


Figura 1.3: Volumen al que se aplica el teorema de Gauss y superficie que lo encierra

A la vista del teorema de Gauss, podemos afirmar que la divergencia de un vector nos habla sobre las fuentes de dicho vector, o dicho de otra forma, las magnitudes que hacen que ese vector mane de (o se genere en) un volumen del espacio.

Para eliminar de una ecuación un rotacional, emplearemos el teorema de Stokes, que dice que si se toma una superficie abierta[3] (figura 1.4) y se halla el flujo del vector rotacional de un campo G, ese flujo es numéricamente igual a la circulación del vector G en la línea que contornea dicha superficie.

$$\iint rot\vec{G}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{G}\cdot d\vec{l} \qquad (1.18)$$

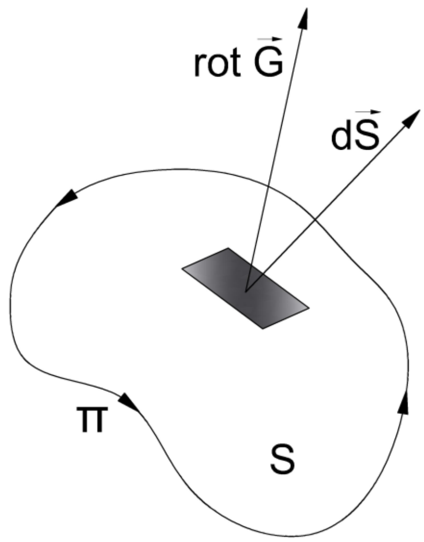


Figura 1.4: Superficie a la que se aplica el teorema de Stokes y línea que la contornea

En la ecuación de Stokes, el signo que liga ambas partes del igual es signo + si y solo si la integral de circulación se ha realizado en un sentido tal que es acorde con la cara de

[3] Una superficie abierta es una superficie que no encierra un volumen. La superficie abierta puede ser plana o alabeada

la superficie en la cual se ha obtenido el flujo según la regla del sacacorchos. En caso contrario el signo es -.

El significado físico de un rotacional es bastante más complejo que el de la divergencia, pero a riesgo de ser poco rigurosos en aras de una mayor claridad de conceptos, imaginémonos un campo G que tiene dirección horizontal (por ejemplo la velocidad de un fluido en una tubería) como el mostrado en la figura 1.5. Si aplicamos el teorema de Stokes a una superficie con dos lados horizontales (colineales con el campo G) a diferentes alturas y dos lados verticales, al hacer la circulación, el producto escalar de G por dl es nulo en los lados verticales (ya que G y dl son perpendiculares), por lo que la circulación de G quedará

$$\oint \vec{G}\cdot d\vec{l} = \left(G_{y1} - G_{y2}\right)\Delta x \qquad (1.19)$$

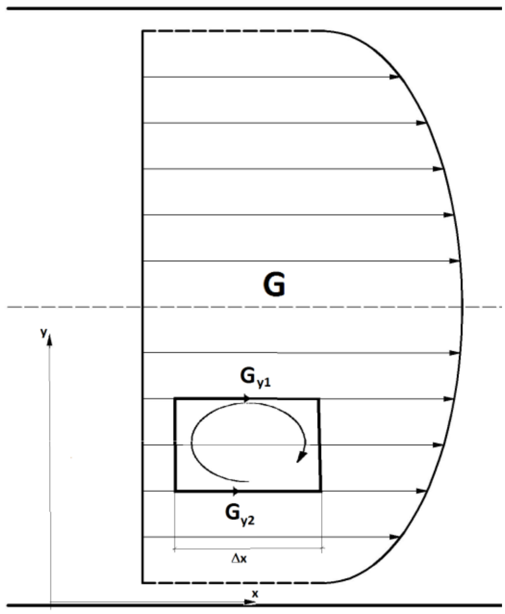


Figura 1.5 aplicación del teorema de Stokes a un campo de dirección horizontal

Donde Δx es la longitud de uno cualquiera de los lados horizontales. De la ecuación anterior se deduce que el campo en dos alturas diferentes sólo tendrá un valor diferente si el rotacional de G es diferente de cero.

Por tanto, a riesgo de ser poco rigurosos en aras de una mayor claridad de conceptos, podemos decir que el rotacional me dice qué es lo que hace crecer a un campo en una dirección diferente de aquella en la que se propaga (a diferencia de la divergencia, que me dice qué es lo que lo hace crecer el campo en la dirección de propagación).

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones muy complejas de resolver. Para estudiar casos simples se utilizan unas ecuaciones derivadas de ellas que obtendremos en los apartados siguientes. Cuando se tienen casos geométricamente complejos y se desea una mayor precisión se resuelven mediante paquetes de software, tales como los basados en el Método de los Elementos Finitos (por sus siglas en inglés FEM).

Antes de obtener las ecuaciones derivadas a partir de las ecuaciones de Maxwell, que son las que utilizaremos a lo largo del curso, vamos a hacer una pequeña reflexión sobre cómo se puede crear un campo eléctrico y cómo se puede crear un campo magnético:

- La primera ecuación de Maxwell me dice que se puede crear un campo eléctrico mediante una distribución de cargas en una zona del espacio, y que el campo emana de las cargas positivas y muere en las cargas negativas
- La segunda de las ecuaciones de Maxwell me dice que un flujo variable en el tiempo da lugar a un campo eléctrico.
- La tercera ecuación de Maxwell me dice que no existen fuentes ni sumideros del vector inducción, por lo que las líneas de inducción no deben tener ni principio ni fin, esto es, deben ser cerradas.
- La cuarta ecuación de Maxwell me dice que las corrientes eléctricas crean campos magnéticos. Del segundo sumando de la ecuación hablaremos más adelante.

LEY DE FARADAY

En este apartado obtendremos una ecuación más sencilla que la segunda ley de Maxwell. Esta ecuación, llamada Ley de Faraday es la que se utilizará a lo largo del curso.

Antes de acometer esta tarea, es preciso indicar que la segunda ecuación de Maxwell tal como fue escrita en el apartado anterior sólo es aplicable al caso de que no exista un movimiento relativo entre la inducción y el material en el que se engendra el campo eléctrico. No obstante, la ecuación que obtendremos en este apartado es válida tanto si existe un movimiento relativo entre los conductores y la inducción como si no lo hay.

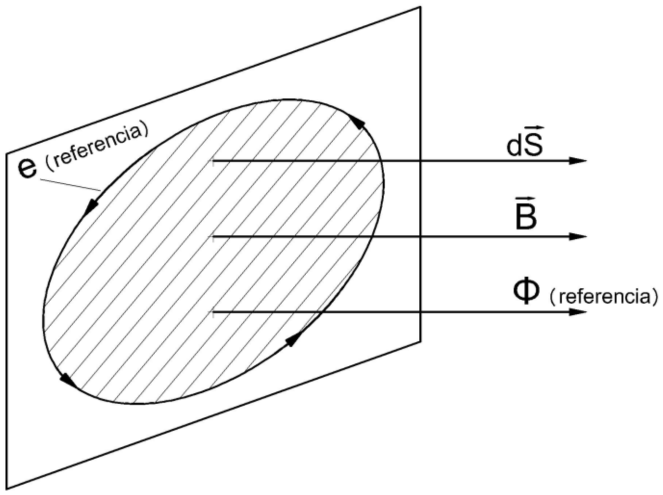


Figura 1.6: Superficie de integración de la segunda ley de Maxwell y línea que la contornea. Referencias de flujo y fuerza electromotriz.

Si integramos la segunda ecuación de Maxwell en una superficie abierta[4] como la de la figura 1.6[5] se tiene

$$\iint rot\vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} \qquad (1.20)$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\iint rot\vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (1.21)$$

Y acudiendo a la definición de diferencia de potencial

$$\iint rot\vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -u \qquad (1.22)$$

Por tanto

$$-u = -\iint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (1.23)$$

Si la superficie es indeformable[6], los operadores derivada e integral se pueden intercambiar y queda

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\cdot d\vec{s} \qquad (1.24)$$

Acudiendo a la definición de flujo

$$u = \frac{d\phi}{dt} \qquad (1.25)$$

Para obtener la ecuación anterior, se ha sustituido la derivada parcial por una derivada total, pues el flujo no es función de las coordenadas (ya que hace referencia a una superficie preestablecida) sino sólo del tiempo. Por el contrario, en la tercera ecuación de Maxwell aparece una derivada parcial pues la inducción es función de las coordenadas y del tiempo.

La ecuación anterior se conoce como Ley de Faraday.

[4] Que no encierre un volumen

[5] Por simplicidad de dibujo, en la figura 1.6 la superficie se ha tomado plana, no obstante en un caso general la superficie sería alabeada.

[6] Aunque la demostración que se va a realizar requiere que la superficie sea indeformable, la ecuación a la que se llegará (ecuación (1.25)) es válida tanto para superficies deformable como indeformables. Por el contrario, la ecuación (1.11) sólo es válida si la superficie no tiene movimiento relativo alguno respecto del vector inducción (lo cual, entre otras cosas, requiere que la superficie no se deforme).

Como se indicó en su momento, el signo que liga la integral de superficie y la integral de circulación en el teorema de Stokes es un signo + sólo si la circulación se establece en un sentido acorde según la regla del sacacorchos con la cara de la superficie elegida para calcular el flujo. Por tanto, el signo que figura en la ley de Faraday sólo es un signo + si las referencias de tensión y de corriente son las indicadas en la figura 1.7.

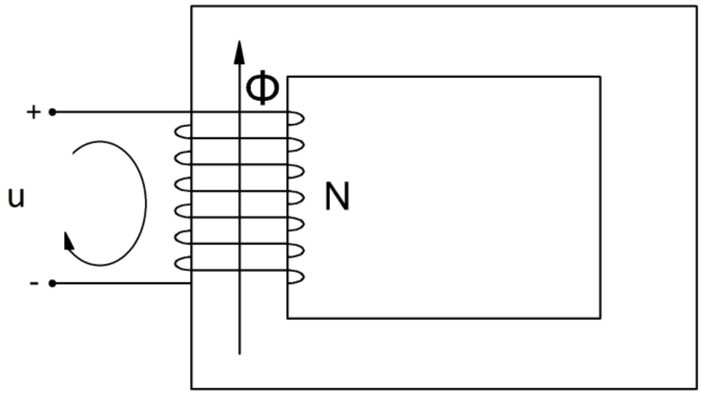


Figura 1.7: Convenio de referencias para la ecuación (1.25)

A la diferencia de potencial creada por un flujo variable en el tiempo se le conoce por fuerza electromotriz[7].

La ecuación de Faraday nos indica que un flujo variable en el tiempo engendra una fuerza electromotriz en un devanado. Un error muy común entre los alumnos que comienzan a estudiar la asignatura es decir que un flujo variable en el tiempo induce una *intensidad*. Esto es incorrecto: Según la ley de Faraday lo que se induce es una diferencia de potencial; esa diferencia de potencial dará origen a una intensidad sólo si se aplica a un circuito cerrado. La cuantía de la tensión inducida viene dada por la ley de Faraday, mientras que la cuantía de la corriente depende de la tensión inducida y de la impedancia del circuito externo.

La ecuación de Faraday es aplicable a cualquier circuito que esté atravesado por un flujo variable en el tiempo, por tanto se puede aplicar tanto al arrollamiento que crea el flujo como a otros arrollamientos que no participan en la creación de flujo o a cualquier elemento interpuesto entre dichos arrollamientos (por ejemplo el material de hierro que forma el circuito magnético).

CONSERVACIÓN DEL FLUJO

En este apartado obtendremos una ecuación derivada a partir de la tercera ley de Maxwell. Para ello integraremos la tercera ley de Maxwell en un volumen del espacio

$$\iiint div\vec{B}dv = 0 \qquad (1.26)$$

Aplicando el teorema de Gauss queda

[7] En realidad no es una fuerza, sino una energía por unidad de carga, por lo que el nombre no es demasiado afortunado

$$\iiint div\vec{B}dv = \iint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \phi \qquad (1.27)$$

Por tanto, de la tercera ecuación de Maxwell se deduce que el flujo total saliente de un volumen del espacio es nulo.

Evidentemente, en una superficie que no encierre un volumen (una superficie abierta) el flujo magnético no tiene por qué ser nulo.

LEY DE AMPERE

En este apartado obtendremos una ecuación más sencilla que la cuarta ley de Maxwell. Esta ecuación, llamada Ley de Ampere es la que se utilizará a lo largo del curso.

Simplificación de la cuarta ecuación de Maxwell

Antes de obtener la ley de Ampere simplificaremos la cuarta ecuación de Maxwell para los casos de interés en la asignatura.

En la cuarta ley de Maxwell aparecen dos sumandos. El orden de magnitud del primero de ellos es de algunos A/mm^2, y en unidades del sistema internacional 10^6 A/m^2.

El segundo sumando es algo más complicado, pues interviene la permitividad y la derivada del campo eléctrico.

La permitividad es el producto de la permitividad del vacío por la permitividad relativa. La permitividad del vacío vale

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9}\frac{1}{4\pi}10^{-9}$$

La permitividad relativa de algunos materiales se muestra en la Tabla I

Tabla I: Permitividad relativa de algunos materiales

Material	**Permitividad Relativa**	**Material**	**Permitividad relativa**	**Material**	**Permitividad relativa**
Aire	1,00059	Papel	3,7	Porcelana	6,5
Agua	80,08	Baquelita	4-4,6	Plexiglás	3-3,6
Aceite de transformador	2,24	Mica Moscovita	4,8-8	Vidrio	5,6

Por tanto, el producto de la permitividad del vacío por la permitividad relativa tiene un orden de magnitud de 10^{-10}

Para obtener el orden de magnitud de la derivada del campo eléctrico tomemos un caso sencillo de un campo eléctrico de forma triangular (figura 1.8):

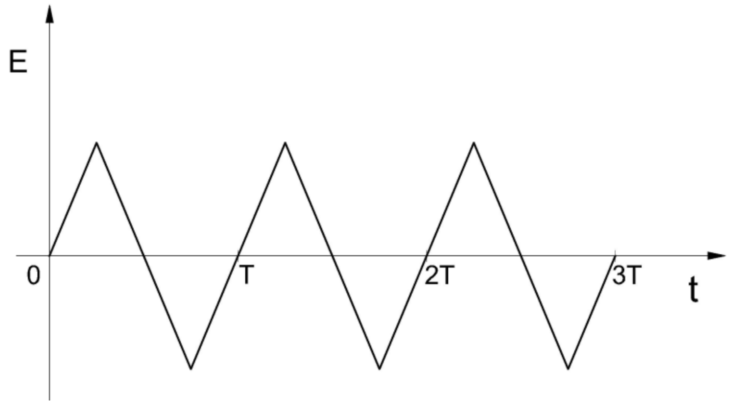


Figura 1.8: Onda de campo eléctrico triangular

En esta onda, la derivada en el tiempo del campo se obtiene dividiendo el valor máximo del campo entre la cuarta parte del período

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E}{\frac{T}{4}} = 4\, fE$$

El valor máximo del campo eléctrico en un medio material está acotado al valor de la rigidez dieléctrica, ya que si se supera la rigidez dielétrica del medio se produce una descarga eléctrica, lo cual supone que las cargas eléctricas se redistribuyen hasta un estado de menor campo eléctrico. En la tabla II se muestra el valor de la rigidez dieléctrica de algunos materiales

Tabla II: Rigidez dieléctrica de algunos materiales de interés.

Material	**Rigidez dieléctrica (V/m)**	**Material**	**Rigidez Dieléctrica (V/m)**	**Material**	**Rigidez Dieléctrica (V/m)**
Aire (1 atm)	$3 \cdot 10^6$	Papel	$12 \cdot 10^6$	Porcelana	$4 \cdot 10^6$
Aceite de trafo	$111 \cdot 10^6$	Mica Moscovita	$11{,}8 \cdot 10^6$	Vidrio	$11{,}8 \cdot 10^6$

Por tanto, el producto de la permitividad por la derivada del campo eléctrico tiene un orden de magnitud de

$f \cdot 10^{-3}$

donde f es la frecuencia.

A la vista del orden de magnitud de los dos sumandos de la ecuación de Maxwell se deduce que el segundo sumando sólo comienza a ser apreciable para frecuencias de Gigahercios.

Por tanto, para frecuencias del orden de la industrial (50 Hz), la cuarta ley de Maxwell queda

$$rot\vec{H} = \vec{J} \qquad (1.28)$$

Obtención de la Ley de Ampere

Para obtener la Ley de Ampere integramos la cuarta ecuación de Maxwell (simplificada) en una superficie abierta como la mostrada en la figura 1.9.

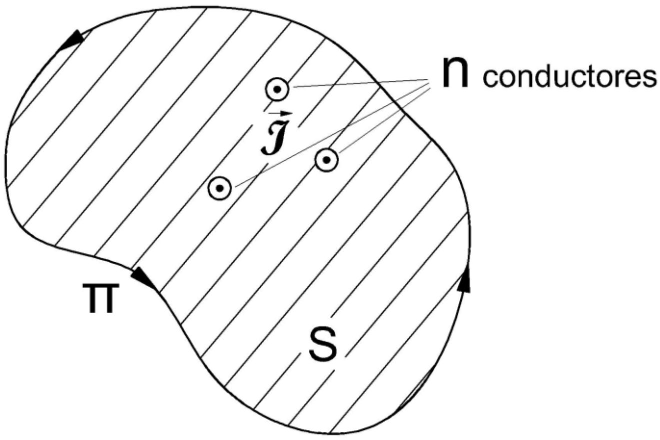


Figura 1.9: Superficie para la integración de la cuarta ley de Maxwell

$$\iint rot\vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad (1.29)$$

El flujo del vector densidad de corriente es la intensidad de corriente

$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad (1.30)$$

En el caso de que la superficie a la que se aplica la integral se vea atravesada por N conductores cada uno de los cuales lleva una intensidad I, el valor de la integral es NI.

Aplicando el teorema de Stokes a la ecuación (1.29) queda

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI \qquad (1.31)$$

Como se indicó anteriormente, el signo del teorema de Stokes sólo es signo + si el sentido de la integral de circulación es acorde con la cara de la superficie a la que se extiende la integral según la regla del sacacorchos. Por tanto, el convenio de referencias acorde con los signos de la ecuación (1.31) es el de la figura 1.10.

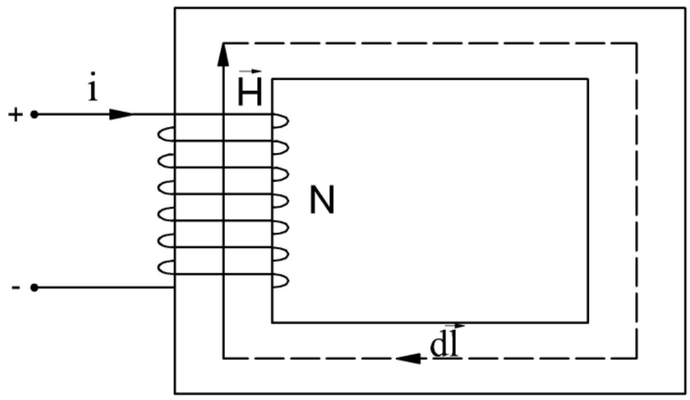


Figura 1.10: Convenio de referencia para la ecuación (1.31)

Es importante señalar que la ley de Ampere es válida en cualquier instante de tiempo.

De la Ley de Ampere se pueden sacar las siguientes conclusiones

-Los campos magnéticos son creados por las corrientes eléctricas y no por las tensiones.

- Si la corriente tiene forma sinusoidal, el campo magnético tiene también forma sinusoidal y los máximos y los ceros de las sinusoides de corriente y de campo magnético se producen en idénticos instantes de tiempo (esto es, son sinusoides en fase)

- La corriente continua también crea campo magnético (y todas las magnitudes derivadas de éste: inducción y flujo), si bien ese campo magnético es constante.

1.4. DUALIDAD ENTRE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Para mostrar la dualidad entre la electricidad y el magnetismo, tomemos un circuito sencillo como el de la figura 1.11. Deseamos encontrar la relación entre la corriente y el flujo creado por ésta. Para ello escribimos las ecuaciones del circuito

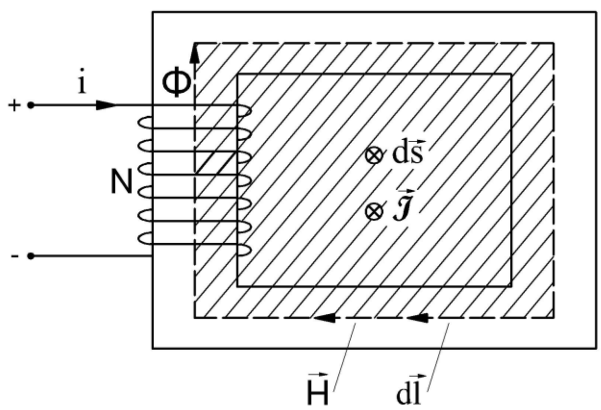


Figura 1.11: Circuito magnético simple

Admitiendo que H es uniforme a lo largo de la línea media del circuito y colineal con el diferencial de longitud, la ley de Ampere queda

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = NI \quad (1.32)$$

La relación entre la inducción y el campo magnético es

$$B = \mu H \quad (1.33)$$

El flujo se obtiene como la integral de la inducción en la sección recta del núcleo magnético

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.34)$$

Y admitiendo que la inducción es uniforme en toda la sección recta del núcleo se cumple

$$\phi = B \cdot S \quad (1.35)$$

De las ecuaciones (1.32) a (1.35) se obtiene

$$\phi = \frac{F}{\Re} \quad (1.36)$$

Donde F es la fuerza magnetomotriz[8]

$$F = NI \quad (1.37)$$

Y $\Re$ es la reluctancia

$$\Re = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S} \quad (1.38)$$

Esta ecuación es conocida como Ley de Hopkinson.

Si la corriente que circula por la bobina es una sinusoide, en la ecuación (1.36) el flujo está en fase con la fuerza magnetomotriz que lo crea.

Las ecuaciones (1.36) y (1.38) permiten establecer una dualidad entre electricidad y magnetismo, como se refleja en la tabla III

[8] No confundir con la fuerza electromotriz

Tabla III: Dualidad entre electricidad y magnetismo

Magnitud Magnética	**Dual eléctrica**	**Ley en Magnetismo**	**Ley dual eléctrica**
Flujo (ϕ)	Densidad de corriente eléctrica (J)	$div\vec{B}=0$	Primera ley de Kirchhoff $\sum I=0$
Fuerza magnetomotriz (F)	Tensión (U)	$\oint \vec{H}d\vec{l}=NI$ $div\vec{B}=0$	Segunda ley de Kirchhoff $\sum RI=U$
Permeabilidad (μ)	Conductividad (σ=1/ρ)	Ley de Hopkinson	Ley de Ohm
Reluctancia ($\mathfrak{R}$)	Resistencia (R)		

El circuito de la figura 1.11 es un circuito sencillo con una sola bobina, en el caso de que hubiera varias bobinas (figura 1.12) la ecuación (1.32) debería escribirse

$$HL=N_1I_1\pm N_2I_2 \qquad (1.39)$$

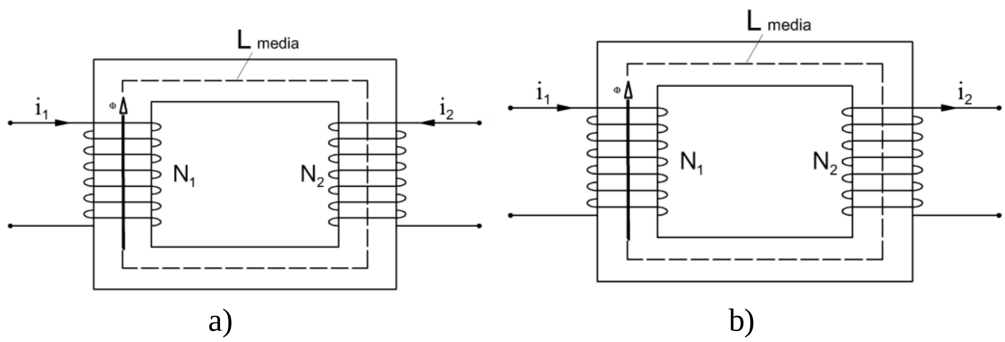


Figura 1.12: circuito magnético con dos bobinas

En la ecuación (1.39) debe usarse signo + si la relación entre las referencias de corriente y la referencia de flujo es acorde según la regla del sacacorchos, como en la figura 1.12 a). En caso de la figura 2 b) el signo será -.

En el circuito con dos bobinas analizado sigue siendo válida la ecuación (1.36), pero la fuerza magnetomotriz es ahora

$$F=N_1I_1\pm N_2I_2 \qquad (1.40)$$

1.5 INDUCTANCIAS PROPIAS Y MUTUAS

Para un usuario de una máquina eléctrica, resulta engorroso trabajar con magnitudes internas de la máquina tales como flujo, fuerza magnetomotriz, inducción, etc. Además, para poder trabajar con esas magnitudes se precisarían datos constructivos (número de espiras, dimensiones del circuito magnético) de las que a menudo no dispone un usuario. Por eso, en este apartado obtendremos una ecuación equivalente a la ley de Faraday pero en la que no aparezca el flujo magnético de forma explícita.

En el caso de un sistema con una sola bobina, el flujo es creado por la intensidad que recorre la bobina.

$$\phi = \frac{Ni}{\Re} \qquad (1.41)$$

Si en la ecuación

$$u = N\frac{d\phi}{dt} \qquad (1.42)$$

se sustituye el flujo por su expresión en función de la intensidad que lo crea. Para el caso de que la reluctancia sea constante se llega a

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad (1.43)$$

Donde el valor de L es:

$$L = \frac{N^2}{\Re} \qquad (1.44)$$

La inductancia propia, L, se define como el número de enlaces de flujo por amperio

$$L = \frac{N\phi}{i} \qquad (1.45)$$

Para el caso de un circuito con dos bobinas, el flujo que concatena cada bobina es, en general, diferente

$$u_1 = N_1\frac{d\phi_1}{dt} \qquad (1.46)$$

$$u_2 = N_2\frac{d\phi_2}{dt} \qquad (1.47)$$

En este caso el flujo que concatena cada una de las bobinas es creado por la acción conjunta de las corrientes que circulan por ambas bobinas

$$N_1\phi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \qquad (1.48)$$
$$N_2\phi_2 = M i_1 \pm L_2 i_2 \qquad (1.49)$$

Donde la inductancia mutua tiene en cuenta los enlaces de flujo que cada amperio de la bobina 1 crea en la bobina 2. En los sistemas físicos reales, las inductancias mutuas son recíprocas, de forma que la inductancia mutua de 1 sobre 2 es idéntica que la inductancia mutua de 2 sobre 1.

El signo de las ecuaciones (1.48) y (1.49) será + o – dependiendo del sentido del bobinado y si la corriente es entrante o saliente a la bobina (esto es, de si la intensidad contribuye a la creación del flujo o se opone a él).

De las ecuaciones (1.46) a (1.49) se obtienen las ecuaciones de la máquina en función de variables externas (tensiones e intensidades)

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \qquad (1.50)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \pm L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (1.51)$$

1.6 MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

La estructura interna de algunos materiales (por ejemplo el hierro, cobalto, níquel y sus aleaciones) está formada por dominios o zonas en cada uno de los cuales los átomos tienen sus momentos magnéticos alineados (figura 1.13). En ausencia de un campo magnético externo la alineación de cada uno de los dominios es diferente, con lo que el cuerpo no presenta un magnetismo resultante. Si embargo, al aplicar un campo magnético externo, aquellos dominios magnéticos cuyo momento magnético está orientado respecto del campo magnético externo crecen en detrimento de los dominios vecinos. Cuando el campo magnético externo es muy intenso, incluso los momentos magnéticos de los dominios que no estaban alineados respecto del campo rotan, hasta alinearse con el campo magnético externo (figura 1.13).

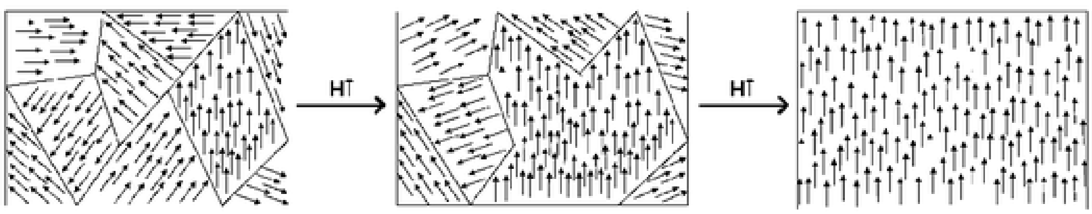


Figura 1.13: Dominios magnéticos en un material ferromagnético

Debido a este comportamiento del material, en estos materiales la inducción obtenida para un valor dado del campo magnético aplicado es muy elevada.

Cuando todos los dominios magnéticos están orientados el material está completamente saturado, y a partir de entonces, los incrementos de inducción son debidos únicamente al incremento del campo magnético externo. En la chapa magnética de grano orientado utilizada en transformadores los fenómenos de saturación comienzan a notarse a los 2.0T a las temperaturas normales de trabajo.

Si se aplica un campo magnético dado (llamémosle H_1) se consigue una cierta inducción B_1 (figura 1.14). Si a partir de ahí se aumenta el valor del campo magnético hasta un valor máximo (H_{max}) se siguen orientando los dominios y la inducción sigue aumentando hasta un valor B_{max}. Si luego se reduce el campo parte de los dominios retornan a su posición primitiva, pero la rotación de los dominios consume una cierta energía (véase apartado 1.7), por ello si se reduce el campo hasta el valor H_1 anterior, no todos los dominios que se orientaron en el paso de H_1 a Hmax volverán a su posición de reposo y por tanto la inducción es ahora mayor que antes, llamémosla B_2 (figura1.14). Este fenómeno se denomina histéresis y supone que la inducción en estos materiales no sólo depende del campo magnético aplicado sino que también depende de si estamos aumentando o disminuyendo el campo magnético. La curva de magnetización de un material ferromagnético se muestra en la figura 1.14.

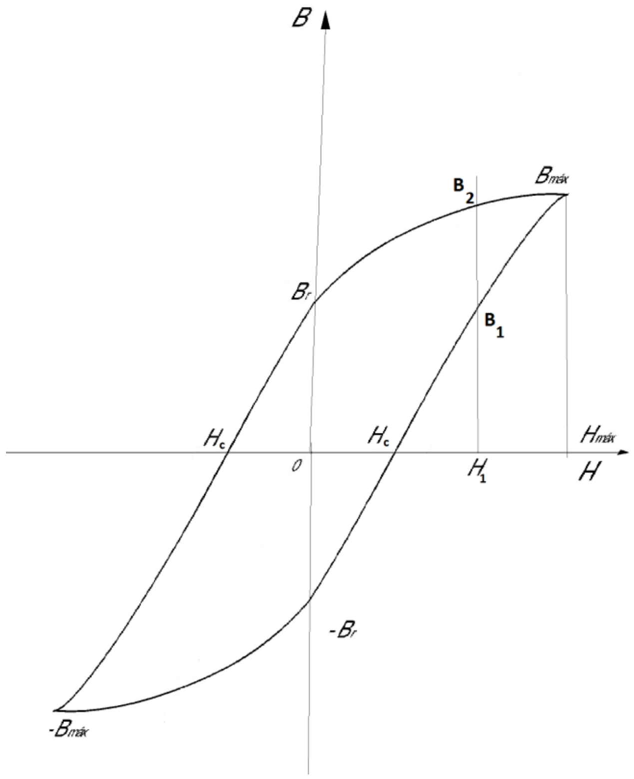
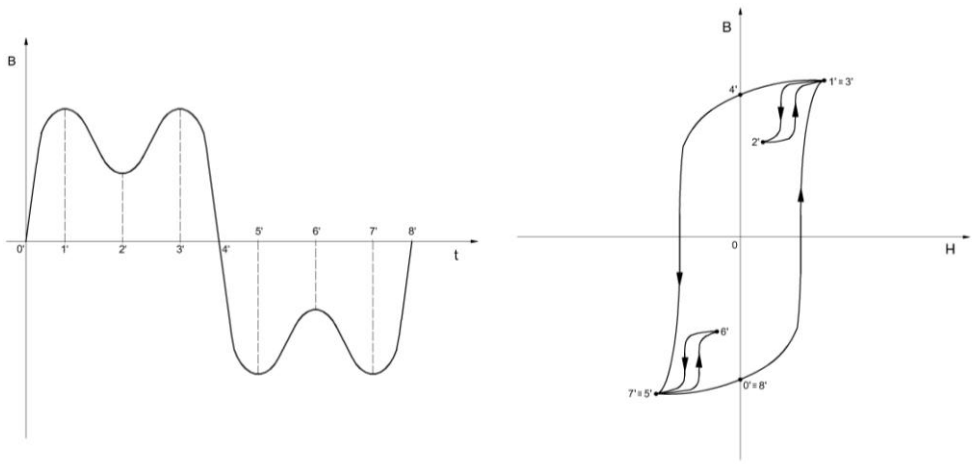


Figura 1.14: curva de magnetización de un material magnético

Si la onda de inducción presenta máximos o mínimos relativos (figura 1.15a) se describen lazos menores en la curva de magnetización (figura 1.15b)



a) b)

Figura 1.15: Onda de inducción con armónicos y ciclo de histéresis correspondiente

Si se aplican al material magnético campos magnéticos sinusoidales con diferentes valores de cresta se describen distintos ciclos de histéresis, como se muestra en la figura 1.16. La curva que une los máximos de los diferentes ciclos de histéresis es aproximadamente igual a la curva de magnetización del núcleo en corriente continua.

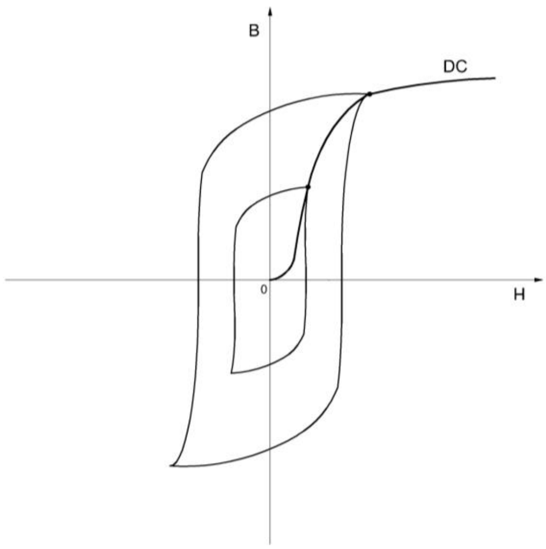


Figura 1.16: Curvas de magnetización en corriente alterna

Para muchos de los razonamientos que se precisan hacer en los circuitos magnéticos[9] considerar las curvas con área de la figura 1.16 es muy farragoso, y es más práctico el utilizar la característica de magnetización en corriente continua, mostrada como DC en la figura 1.16.

[9] Por ejemplo, para razonar si la inductancia de una bobina saturada es mayor o menor que la de esa misma bobina cuando trabaja con su circuito magnético menos saturado.

1.7. ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

El objetivo de este apartado es obtener una expresión que permita cuantificar las pérdidas de potencia activa de un núcleo magnético debidas al fenómeno de histéresis. Para este fin, en un circuito como el mostrado en la figura 1.17 vamos a obtener la energía entregada por la fuente a la bobina.

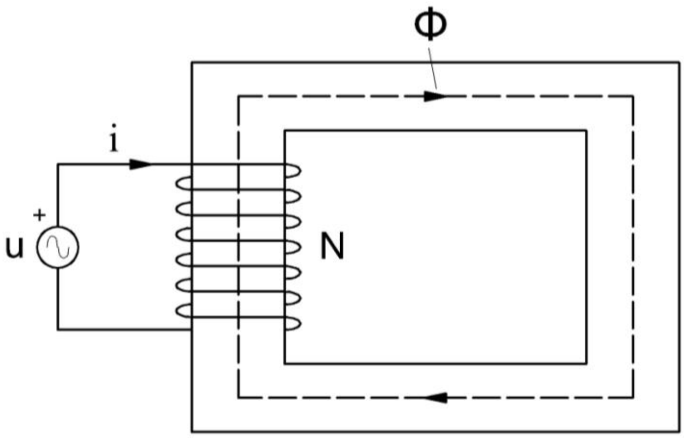


Figura 1.17: Circuito magnético excitado mediante corriente alterna

La energía entregada por la fuente a las cargas en un intervalo de tiempo infinitesimal es el producto de la tensión[10] por la intensidad[11] por el intervalo de tiempo

$$dW = uidt \qquad (1.52)$$

Y teniendo en cuenta la ley de Faraday y la ley de Ampere

$$u = N\frac{d\phi}{dt} \qquad (1.53)$$

$$HL = Ni \qquad (1.54)$$

queda

$$dW = N\frac{d\phi}{dt}\frac{HL}{N}dt = V_{Fe}HdB \qquad (1.55)$$

Donde V_{Fe} es el volumen del circuito magnético.

Para fijar ideas supongamos que la corriente que circula por la bobina es sinusoidal[12] (figura 1.18)

[10] Conceptualmente energía por unidad de carga
[11] Conceptualmente carga eléctrica en la unidad de tiempo
[12] En posteriores capítulos se matizará este aspecto con mayor precisión

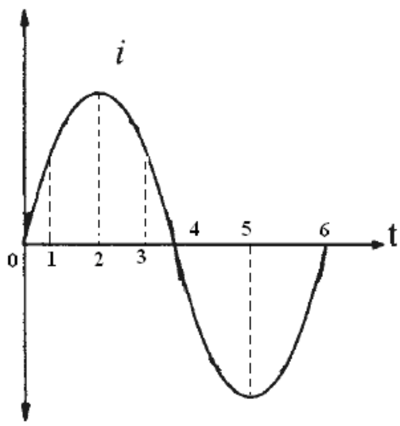


Fig 1.18: Corriente inyectada en la bobina de la figura 1.17

En el instante de tiempo marcado como 0 en la figura 1.18, la intensidad es nula, y en virtud de la ecuación (1.54) el campo magnético también lo es. Por tanto, este punto corresponde al punto marcado como 0 en la figura 1.19

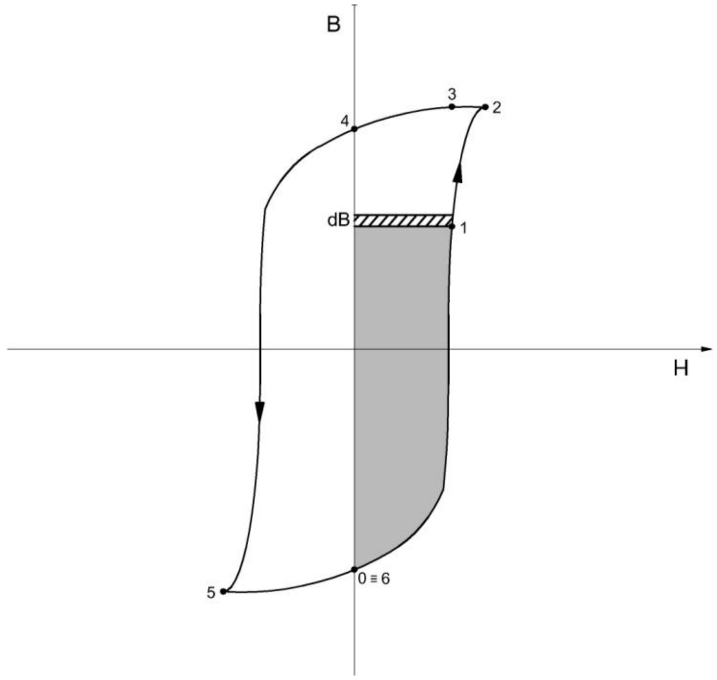


Figura 1.19: Almacenamiento de energía eléctrica en el campo magnético

Al pasar del punto 0 al 1 en la curva de la figura 1.18, se pasa del punto 0 al 1 en la curva de la figura 1.19. La energía entregada por la fuente en este intervalo de tiempo es

$$W = V_{Fe}\int_{0}^{1} HdB \qquad (1.56\ a)$$

Que coincide numéricamente con el área sombreada en gris de la figura 1.19. De igual modo, cuando se llega al punto 2 de la figura 1.18 la energía entregada por la fuente en este primer cuarto de ciclo es el área sombreada en gris de la figura 1.20

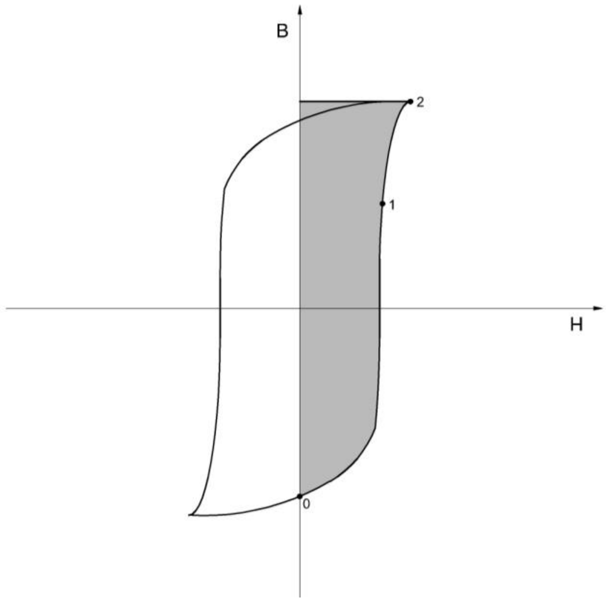


Figura 1.20: Máxima energía almacenada en el campo magnético

Al pasar del punto 2 en la figura 1.18 al 3, se pasa del punto 2 al 3 en la figura 1.21. En el intervalo que va del punto 2 al 3 la intensidad sigue teniendo signo positivo (luego H también es positivo), pero los dB son negativos, pues la corriente va disminuyendo, por lo tanto, entre los puntos 2 y 3 se toma una energía negativa de la red (lo cual físicamente corresponde a que se devuelve energía a la red)

$$W = V_{Fe} \int_2^3 H dB \qquad (1.56\ \text{b})$$

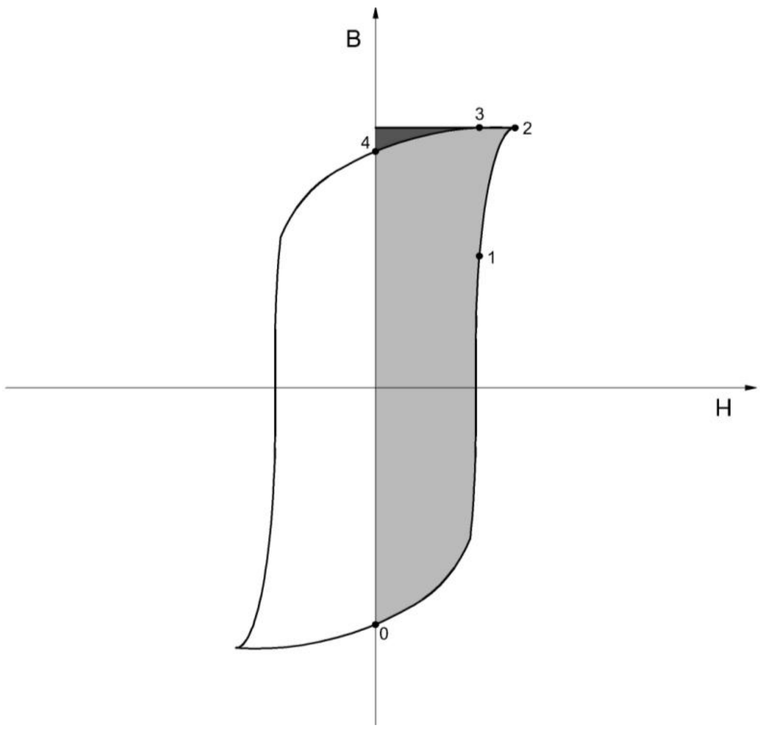


Figura 1.21: Devolución de energía a la red al desmagnetizar el núcleo

No es de extrañar que la bobina entregue energía a la fuente, ya que un campo magnético, en definitiva, es una forma de energía. Durante el intervalo 0-2 se está estableciendo el campo magnético en el núcleo, y ello requiere tomar una energía de la red, mientras que durante el intervalo 2-4 se está destruyendo campo magnético y ello requiere drenar la energía almacenada en el circuito magnético y devolvérsela a la red. Debido a las pérdidas de potencia activa que conlleva la rotación de los dominios magnéticos la energía devuelta a la red durante el intervalo 2-4 es menor que la consumida de la red durante el intervalo 1-2.

En la figura 1.21 la energía devuelta a la red está representada por el área sombreada de color negro. Cuando se describe un ciclo eléctrico completo la energía magnética consumida y no devuelta a la red viene dada por el área gris de la figura 1.22 mientras que la energía consumida y posteriormente devuelta a la red viene dada por el área negra.

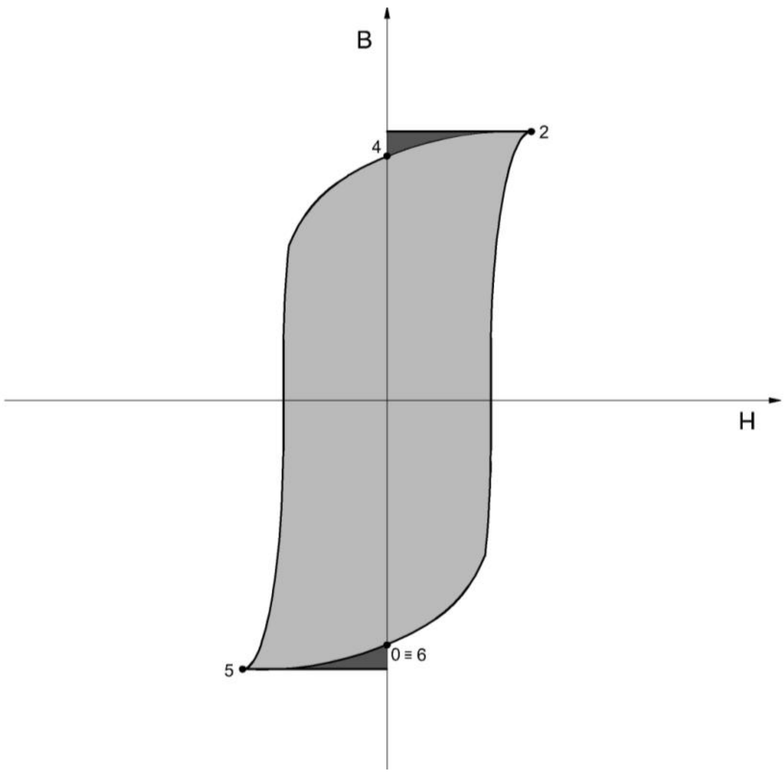


Figura 1.22: Energía perdida por histéresis

Por tanto, la potencia consumida será

$$W = \frac{Area_{BH}}{T} Vol_{Fe} \qquad (1.57)$$

Donde T es el tiempo que se tarda en describir un ciclo eléctrico, esto es, el período.

El área del ciclo BH se puede expresar como el valor máximo de la inducción elevado a una cierta potencia. Por tanto, la potencia consumida y no devuelta al magnetizar el núcleo será

$$W = K_H B^{\alpha} f Vol_{Fe} \qquad (1.58)$$

Como es sabido, la energía no se crea ni se destruye. En el caso de el núcleo magnético, esta energía tomada de la fuente y no devuelta se convierte en calor. Ese calor se genera cuando las paredes de los dominios magnéticos rozan entre sí al orientarse con el campo magnético externo o desorientarse. Esta potencia se suele denominar pérdidas por histéresis

1.8 POTENCIA REACTIVA

Imagínese una bobina con núcleo de aire. En el aire se verifica

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (1.59)$$

En un plano B-H, ésta es la ecuación de una línea recta que pasa por el origen. De modo que el *ciclo de histéresis* no tiene área en este caso. Siguiendo el razonamiento del apartado anterior se podría demostrar que en este caso la potencia consumida por la bobina en un ciclo sería cero.

Sin embargo, aunque la potencia media es cero, la potencia instantánea no es cero: en el primer cuarto de periodo la bobina demanda energía de la fuente, que devuelve en el segundo cuarto. En otras palabras, en una bobina alimentada en corriente alterna se tiene un campo magnético alternativo, lo cual supone que la energía almacenada en el interior de la bobina es diferente en cada instante de tiempo, lo que implica que exista una potencia instantánea fluctuante entre la fuente y el generador. A esta energía de valor medio cero se le llama energía reactiva.

De la descripción anterior podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Si en una máquina (como ocurre con las máquinas síncronas) el campo magnético se crea mediante una bobina alimentada en corriente continua y el nivel de magnetización de la máquina en un ciclo es constante, la máquina no precisa energía reactiva para ser magnetizada (tomó la energía en el transitorio de conexión de la bobina, y a partir de ahí ya no se toma más energía).
- Como se estudiará en posteriores asignaturas, los generadores síncronos pueden generar potencia reactiva. Un generador síncrono está movido por una máquina motriz que puede ser una turbina, un motor diesel, etc. Dado que la energía reactiva tiene un valor medio cero, para generar energía reactiva no hace falta consumir energía mecánica (ni por tanto combustible). Por tanto, el generar potencia reactiva es (en principio) gratis.

En este apartado y en el precedente hemos analizado el consumo de energía en una bobina. Si analizáramos el consumo de energía en un condensador alimentado en corriente alterna, obtendríamos las conclusiones siguiente que son bastante semejantes a las obtenidas para una bobina:

- En el espacio entre armaduras del condensador se tiene un campo eléctrico.
- Asociado al campo eléctrico hay una energía almacenada en el espacio entre armaduras.
- Si la tensión aplicada es sinusoidal la magnitud del campo electrostático será variable en el tiempo.
- Por tanto la energía almacenada en el condensador es variable al transcurrir el tiempo.
- Para que esto suceda hay un intercambio de potencia entre la red y el condensador. En ausencia de pérdidas dieléctricas el valor medio de la energía es cero.

Ahora bien, si asociamos un condensador en serie con una bobina[13], se tiene que en los instantes en los que el condensador demanda energía la bobina está devolviendo energía, mientras que en los instantes en los que el condensador devuelve energía la bobina está demandando energía. Por eso se conviene (es un convenio) en decir que una bobina consume energía reactiva y un condensador la genera, cuando en realidad no cabe hablar de consumo o generación, porque como se ha visto el valor medio en un período de la energía es nulo.

Las máquinas eléctricas disponen de bobinas que crean campos magnéticos. De lo visto en este apartado, se comprende que cuando se conecta a una máquina eléctrica (sea un transformador, una máquina de inducción o una máquina síncrona) un condensador el flujo en el interior de la máquina aumenta (efecto Ferranti en transformadores, cebado de generadores de inducción o sobreexcitación de generadores síncronos).

1.9. EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EN FUNCIÓN DE LAS INDUCTANCIAS PROPIAS Y MUTUAS

En este apartado obtendremos una expresión para la energía magnética almacenada en un circuito simple como el de la figura 1.22 con dos bobinas.

En un instante cualquiera del tiempo, la energía magnética almacenada en el campo magnético tiene por expresión

$$dW_{mag} = \sum dW_{el} = u_1 i_1 dt \pm u_2 i_2 dt \qquad (1.60)$$

[13] Lo mismo ocurriría si la asociación es en paralelo

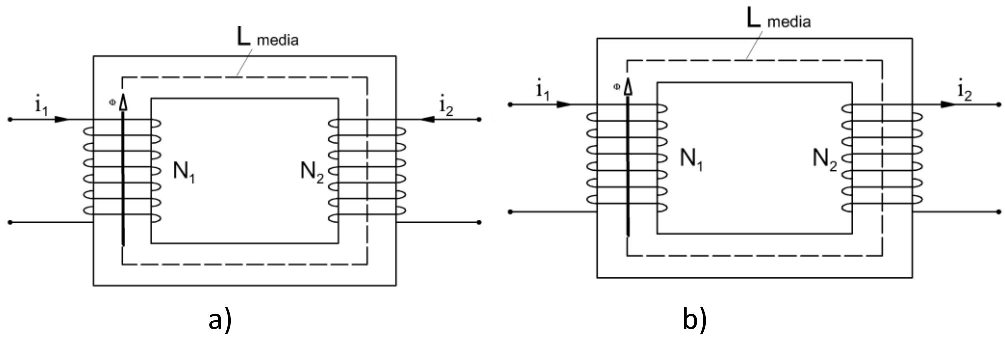


Figura 1.22: circuito magnético con dos bobinas

En los sistemas de la figura 1.22 se cumple

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \qquad (1.61)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \pm L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (1.62)$$

Los signos en las ecuaciones (1.60), (1.61) y (1.62) serán positivos si la corriente secundaria contribuye a crear flujo en idéntico sentido que la primaria (figura 1.22 a), y serán negativos en caso contrario (figura 1.22 b).

Introduciendo (1.61) y (1.62) en (1.60) queda

$$dW_{mag} = L_1 i_1 di_1 \pm M i_1 di_2 \pm M i_2 di_1 + L_2 i_2 di_2 \qquad (1.63)$$

Integrando queda

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_2 i_1 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \qquad (1.64)$$

El signo – en la ecuación (1.64) ilustra la forma en la que se transvasa la energía de una bobina a la otra en el sistema de la figura 1.23: La bobina de la columna de la izquierda toma una energía de la fuente de alimentación y la convierte en energía almacenada en el campo magnético. La bobina de la derecha, por el contrario, toma energía del campo magnético y la convierte en energía eléctrica que entrega a la carga Z_L.

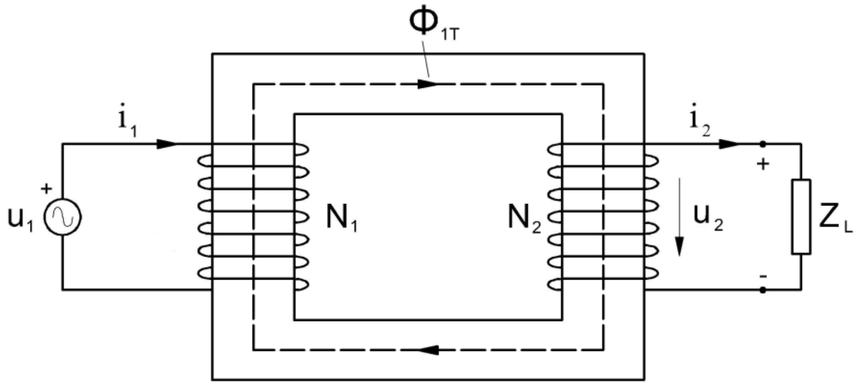


Figura 1.23: Transformador alimentando una carga

El párrafo anterior justifica la forma de transvasar energía en los transformadores de potencia, que serán estudiados con más detenimiento en próximos capítulos. Para justificar el transvase de energía en las máquinas eléctricas rotativas es preciso analizar cómo se convierte la energía magnética en energía mecánica en sistemas que dispongan de una parte móvil. Por falta de tiempo esa demostración no se realizará de forma rigurosa, y se remite a la bibliografía especializada para aquellos estudiantes que deseen conocerlo. [14]

[14] Por ejemplo, el apartado 1.8 del libro Jesús Fraile Mora "Máquinas Eléctricas" Editorial McGrawHill (sexta edición)