MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 5

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DIFERENCIAL

Continuando con el estudio de funciones de una variable, en este capítulo aprenderemos la definición de derivada de una función, así como, reglas para calcular derivadas de una forma rápida y sencilla. Además, veremos dos aplicaciones útiles de las derivadas, como son la obtención de los extremos relativos de funciones y el cálculo de rectas tangentes a una función dada en un punto concreto.

5.1. DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE.

Sea una función $f : \Re \longrightarrow \Re$ se define la *derivada primera* de f en x_0 como

$$f'(x_0) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda) - f(x_0)}{\lambda}.$$

La existencia de este límite requiere que coincidan los límites laterales o *derivadas laterales*, $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$. Si las derivadas laterales son finitas, aunque no coincidan, la función $f(x)$ tiene comportamiento continuo en x_0, además, se dice que el punto x_0 es *anguloso.*

Si $f'(x_0)$ es un número real, diremos que la función f es derivable en el punto x_0. Si por el contrario, $f'(x_0)$ no es un número real o el límite no existe, entonces la función no es derivable en dicho punto.

Ejemplo 1.

a) Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 3$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f(3+\lambda) - f(3)}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{(3+\lambda)^2 - 3^2}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{(9 + 6\lambda + \lambda^2) - 9}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{6\lambda + \lambda^2}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} (6 + \lambda) = 6. \end{aligned}$$

b) Calcular la derivada de $f(x) = \frac{2}{5}x$ en el punto $x_0 = 5$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f(5+\lambda) - f(5)}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\frac{2}{5}(5+\lambda) - \frac{2}{5}(5)}{\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{2(5+\lambda) - 10}{5\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{10 + 2\lambda - 10}{5\lambda} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Aplicando la definición de la derivada de una función en un punto podemos calcular la derivada de cualquier función dada, sin embargo utilizaremos la siguiente tabla de derivadas que nos permite calcular la derivada de una función sin tener que calcular ningún límite.

Tipo	Función	Derivada
Constante	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Producto	$f(x) = a\ x$	$f'(x) = a$
Irracional	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}$
Potencial	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n \cdot g(x)^{n-1} \cdot g'(x)$
Exponencial	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$
Logarítmica	$f(x) = \ln g(x)$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

También son importantes las reglas de derivación que resumimos en la siguiente tabla.

Suma	$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
Resta	$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$
Producto	$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Cociente	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo 2.

Tipo	Función	Derivada
Constante	$f(x)=5$	$f'(x)=0$
Producto	$f(x)=4x$	$f'(x)=4$
Irracional	$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^{3-1}}}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
Potencial	$f(x)=(x^2-3x)^5$	$f'(x)=5\cdot(x^2-3x)^{5-1}\cdot(2x-3)$ $=5\cdot(x^2-3x)^4\cdot(2x-3)$
Exponencial	$f(x)=e^{x^3+4}$	$f'(x)=3x^2\cdot e^{x^3+4}$
Logarítmica	$f(x)=\ln(x^4+7)$	$f'(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+7}$
Producto	$f(x)=x^5\cdot\ln 3x^2$	$f'(x)=5x^4\cdot\ln 3x^2+x^5\cdot\frac{6x}{3x^2}$ $=x^4\cdot\left(5\ln 3x^2+2\right)$
Cociente	$f(x)=\dfrac{x^2-3}{x}$	$f'(x)=\dfrac{(2x)\,x-\left(x^2-3\right)}{x^2}=\dfrac{2x^2-x^2+3}{x^2}$ $=\dfrac{x^2+3}{x^2}$

5.2. ESTUDIO LOCAL DEL CRECIMIENTO DE FUNCIONES.

El signo de la derivada de una función en un punto x_0 determina el comportamiento local en dicho punto de la función dada. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función utilizaremos el siguiente criterio:

Si $f'(x_0) > 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f es creciente en x_0.

Si $f'(x_0) < 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f es decreciente en x_0.

Si $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f es estacionario en x_0.

La anulación de la derivada primera caracteriza a los *puntos críticos o extremos relativos* como veremos más adelante. Si la función $y = f(x)$ admite derivada primera en todos los puntos de su dominio entonces se le puede asociar la *función derivada primera* que se denota por $f'(x)$.

Ejemplo 3.

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 + 2$.

Solución:

Como el dominio de la función dada es todo $\Re$ podemos calcular directamente la primera derivada y estudiar en qué punto se anula.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

En el siguiente cuadro resumimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Si la función derivada primera vuelve a ser derivable en x_0 su derivada se denomina *derivada segunda*, y se define como:

$$f''(x_0) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \lambda) - f'(x_0)}{\lambda}.$$

Al igual que antes, el signo de la derivada segunda de una función en un punto x_0 determina el comportamiento local en dicho punto de la derivada primera. Así,

Si $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f' es creciente en x_0.

Si $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f' es decreciente en x_0.

Si $f''(x_0) = 0 \Longrightarrow$ el comportamiento de f' es estacionario en x_0.

Ejemplo 4.

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función derivada primera de $f(x) = x^3 + 2$.

Solución:

Tendremos que calcular la derivada de la función derivada primera de $f(x)$, o equivalentemente, calcular la derivada segunda de $f(x)$, que será:

$$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

En el siguiente cuadro resumimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la derivada primera:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	decreciente	creciente

Si la función derivada segunda vuelve a ser derivable en x_0 su derivada se denomina *derivada tercera*, $f'''(x_0) = \text{lím}_{\lambda \longrightarrow 0} \dfrac{f''(x_0 + \lambda) - f''(x_0)}{\lambda}$. Del mismo modo se definen las funciones derivadas sucesivas: $f''''(x), \ldots.., f^{n)}(x)$.

EXTREMOS RELATIVOS

Para hallar los extremos relativos de una función real de una sóla variable deberemos calcular las derivadas primera y segunda, ya que la anulación de la derivada primera caracteriza a los *puntos críticos o extremos relativos y* el signo de la derivada segunda nos informa del tipo de *extremos relativo (máximo, mínimo o punto de silla)*. Por definición, una función real f alcanza un *máximo relativo* en el punto x_0 si en una vecindad de dicho punto se verifica $f(x_0) \geq f(x)$. Análogamente, una función real f alcanza un *mínimo relativo* en el punto x_0 si en una vecindad de dicho punto se verifica $f(x_0) \leq f(x)$. Cuando la función es de una sóla variable, los pasos a seguir para el estudio de extremos relativos son los siguientes:

- Primer paso: Si $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ punto crítico.
- Segundo paso: Si $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow$ máximo.
  Si $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow$ mínimo.
  Si $f''(x_0) = 0 \Longrightarrow$ punto de silla.

Ejemplo 5.

Estudiar los extremos relativos y el los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^2 - x - 6\,.$$

Solución:

Como el dominio de la función dada es todo $\Re$ podemos calcular directamente la primera derivada y estudiar en qué punto se anula.

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Luego, en el punto $x = \frac{1}{2}$ la función tiene un extremo relativo. Para estudiar que tipo de extremo relativo es calculamos la segunda derivada de la función dada.

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ es un mínimo.}$$

En el siguiente cuadro resumimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada:

x	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

5.3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS: RECTAS TANGENTES.

Como hemos visto en el apartado anterior, las derivadas de funciones sirven para calcular los extremos relativos y para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las mismas. Otra aplicación interesante de las derivadas es que pueden utilizarse para calcular la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto determinado x_0. Esto es debido a que, por definición, la pendiente b de la recta tangente a $f(x)$ en x_0 coincide con el valor de $f'(x_0)$, es decir,

$$b = f'(x_0),$$

y la ecuación de la recta tangente será:

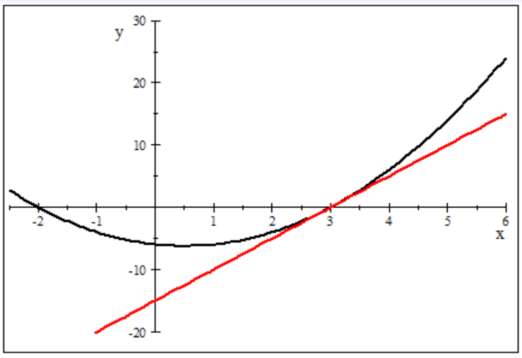
$$y - f(x_0) = b(x - x_0) \text{ o equivalentemente } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 6.

a) Dada la función $f(x) = x^2 - x - 6$, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $x_0 = 3$.

Solución:

- Calculamos $f(x_0)$ sustituyendo el valor de $x_0 = 3$ en la función dada: $f(x_0) = 3^2 - 3 - 6 = 0$.
- Para obtener la pendiente b, hacemos la derivada de la función y sustituimos el valor de $x_0 = 3$. Así : $f'(x) = 2x - 1$ y $b = f'(x_0) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.
- La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_0) = b(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 5(x - 3) \Rightarrow y = 5(x - 3)$.



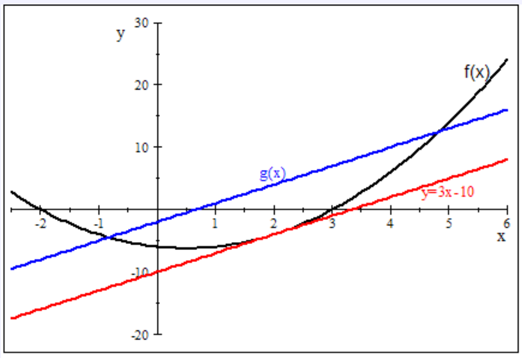
b) Dada la función $f(x) = x^2 - x - 6$, hallar la ecuación de la recta tangente paralela a la recta $g(x) = 3x - 2$.

Solución:

- La pendiente de la recta $g(x) = 3x - 2$ es $b = 3$, que es la misma que la de la recta tangente que debemos obtener, ya que son paralelas.
- Para calcular el punto de corte x_0 calculamos la derivada primera de $f(x)$ y la igualamos a $b = 3$, ya que sabemos que $b = f'(x_0)$.

$$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow b = 3 = f'(x_0) = 2x_0 - 1 \Rightarrow 2x_0 = 3 + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

- Calculamos el valor de $f(x_0)$ que será: $f(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4$.
- La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_0) = b(x - x_0) \Rightarrow y - (-4) = 3(x - 2)$ $\Rightarrow y + 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 6 - 4 = 3x - 10$.



5.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2004, opción A). Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \qquad a \neq 0.$$

Se pide:

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

Solución:

a) Primeramente calculamos la primera derivada de la función dada y hallamos los valores de a para los cuales dicha derivada se anula en $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{a}\left(-2a^2x + 5a + 3x^2\right) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{a}\left(-2a^2 + 5a + 3\right) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 5a - 3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $2a^2 - 5a - 3 = 0$, obtenemos los valores de a pedidos.

$$2a^2 - 5a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow a = 3 \text{ y } a = -\frac{1}{2}.$$

A continuación comprobamos si para esos valores de a obtenidos la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$. Para ello calculamos la derivada segunda de $f(x)$ en $x = 1$.

$$f''(x) = -\frac{1}{a}\left(2a^2 - 6x\right).$$

Si $a = 3 \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{3}(18 - 6x) = 2x - 6 \Rightarrow f''(1) = 2 - 6 = -4 < 0 \Rightarrow$ la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$ cuando $a = 3$.

Si $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) = 2\left(\frac{1}{2} - 6x\right) = 1 - 12x \Rightarrow f''(1) = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow$ la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$ cuando $a = -\frac{1}{2}$.

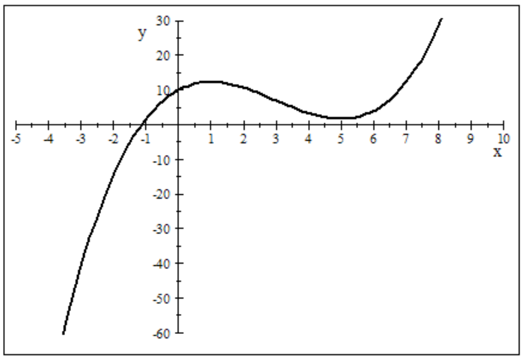
b) Si $a = 3$, entonces $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ y, en el apartado anterior, calculamos la derivada, luego sustituyendo el valor de a obtenemos $f'(x) = \frac{1}{3}\left(-18x + 15 + 3x^2\right)$. Ahora igualamos la primera derivada a cero para calcular los posibles extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(-18x + 15 + 3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}.$$

Entonces, $x = 5$ y $x = 1$. A continuación, calculamos la segunda derivada para estudiar si los extremos relativos son máximo, mínimo o punto de silla.

$$f''(x) = 2x - 6 \Rightarrow f''(5) = 4 > 0 \text{ y } f''(1) = -4 < 0.$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 5$. A continuación puede verse el gráfico de la función dada.



2. (2009, opción A). Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2.$$

Se pide:

a) Determinar los extremos relativos de $f(x)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de $f(x)$ y el eje OX.

Solución:

a) Comenzamos calculando la primera derivada de la función dada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 2(x^2 - 1)2x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \ \text{ o } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ o } x = \pm 1.$$

A continuación, hallamos la segunda derivada y la evaluamos en dichos puntos para ver que tipo de extremos relativos son.

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \Rightarrow f''(0) = -4,\ f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 \text{ y } f''(1) = 12 - 4 = 8.$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x = 0$ y dos mínimos en $x = \pm 1$.

b) Para calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$, procederemos como en el ejemplo estudiado anteriormente.

- Calculamos $f(x_0)$ sustituyendo el valor de $x_0 = 3$ en la función dada: $f(x_0) = (3^2 - 1)^2 = 64$.

- Para obtener la pendiente b, hacemos la derivada de la función y sustituimos el valor de $x_0 = 3$. En el apartado anterior calculamos $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$, luego $b = f'(x_0) = 12(3^2 - 1) = 96$.

- La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_0) = b(x - x_0) \Rightarrow y - 64 = 96(x - 3) \Rightarrow y = 96x - 224$.