MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 4

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

CAPÍTULO 4

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Trabajaremos con funciones de una variable y estudiaremos su comportamiento. Las funciones reales de una variable son útiles por la posibilidad de realizar su representación gráfica, además se pueden emplear para modelar y resolver problemas de la vida real.

4.1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE.

Dados dos conjuntos A y B, una **función** $f : A \to B$ es una regla o aplicación que asigna a cada elemento x del conjunto A, exactamente un elemento y del conjunto B. En este caso, se usa la notación $y = f(x)$, que se lee "y es función de x".

Dada la función $f : A \to B$, el conjunto inicial o de entrada A es el **dominio** de la función, mientras que el conjunto de salida B es la **imagen** de f. Cuando los conjuntos A y B son subconjuntos de números reales, la función recibe el nombre de *función real de variable real.*

El dominio de una función es el conjunto de números reales para los que está definida dicha función.

Ejemplo 1.

- El dominio de la función dada por $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ excluye los valores que resultan de una división entre cero, es decir, su dominio son todos los números reales excepto ± 2 $(x^2 - 4 = 0)$, escrito de forma matemática, $A = \Re \setminus \{-2, 2\}$.
- La función $f(x) = \ln(x)$ está definida en el intervalo $[0, \infty)$, ya que no exite el logaritmo neperiano de un número negativo.

Sea $y = f(x)$ una función definida en el conjunto A, el conjunto de pares $(x, f(x)) = (x, y)$ se llama gráfica de la función. En la siguiente sección aprenderemos una herramienta útil para la representación gráfica de funciones así como para el estudio de la continuidad de funciones.

4.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Sea una función $f : A \to B$, la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\,,$$

se lee diciendo "el límite de la función f, cuando x tiende a a, es L", lo que significa que f se puede aproximar a L tanto como se quiera, sin más que elegir x suficientemente próximo a a.

Ejemplo 2.

- $\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 1(= 1^2 - 3 + 1 = -1.$
- $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$
- $\lim_{x\to 2} (1 - 2x)^2 = (1 - 2 \cdot 2)^2 = (-3)^2 = 9.$
- $\lim_{x\to 0}(3x + 5) = 5.$

TEOREMA DE UNICIDAD: Si una función tiene límite en un punto, éste es único.

Los límites verifican las siguientes propiedades:

P.1. $\lim_{x\to a} kf(x) + hg(x) = k\lim_{x\to a} f(x) + h\lim_{x\to a} g(x)$.

P.2. $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

P.3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Ejemplo 3.

- $\lim_{x\to 1} (2x)(x-1) = \lim_{x\to 1} (2x)\cdot \lim_{x\to 1} (x-1) = 2\cdot 0 = 0.$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+1}{x+1} = \dfrac{1^2-3+1}{1+1} = \dfrac{-1}{2}.$
- $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+1}{x-2} = \dfrac{2^2-3\cdot 2+1}{2-2} = \dfrac{-1}{0} = -\infty.$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2.$

También pueden calcularse los límites de una función en el infinito ($\pm\infty$). Cuando x se hace tan grande o tan pequeña como se quiera, tanto los valores de x como los de la función $f(x)$ pueden ser finitos o infinitos.

Ejemplo 4.

- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-2x+1}{3x^3+x-2} = 0$, por ser el denominador de mayor orden que el numerador.
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-2x+1}{3x^2+x-2} = \infty$, por ser el denominador de menor orden que el numerador.
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-2x+1}{3x^2+x-2} = \dfrac{5}{3}$, por ser de mismo orden el denominador y el numerador.
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}.$

Al estudiar la existencia de límite de una función en un punto a si sólo miramos el valor de la función en algunos puntos del entorno de a hablaremos de *límite restringido o local.* En el caso de funciones de una variable tendremos dos límites restingidos llamados *límites laterales* (por la izquierda y por la derecha).

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real de una variable. Se define el *límite por la izquierda* como $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = L^-$. Análogamente, se define el *límite por la derecha* como $\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = L^+$. Si $L^- = L^+$, entonces la función tiene límite en a.

Ejemplo 5.

a) Estudie el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} x = 0\,,$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} (x+1) = 1\,.$$

Como $0 = L^- \neq L^+ = 1$, entonces no exite el límite de la función en $x = 0$.

b) Estudie el límite de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en el punto $x = 3$.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3} 2x-5 \; = 2\cdot 3 - 5 = 1 \quad ,$$
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3} (x-2) = 1\,.$$

Como $L^- = L^+ = 1$, entonces existe el límite de la función en $x = 3$ y vale 1.

4.3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **continua** en un punto a si se verifica:

a) El punto a pertence al dominio de la función, es decir, existe $f(a)$.

b) Existe $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$.

c) $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ejemplo 6.

Estudie la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Solución:

El dominio de la función dada es el conjunto de los números reales, $\Re$. Además, hemos visto en el ejemplo anterior, que existe el límite de la función en $x = 3$ y que $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 1$. Por lo tanto, se verifican los apartados a) y b) de la definición de continuidad. Es fácil ver que $f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Luego, $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 1 = f(3)$, es decir, la función es continua en todo su dominio.

En las funciones de una variable hablaremos de continuidad por la derecha de a cuando $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$, y de continuidad por la izquierda de a si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es **discontinua** en un punto a si no se cumple alguna de las condiciones de continuidad.

Existen tres tipos de discontinuidad:

- *Evitable:* si existe $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$, pero $L \neq f(a)$, o no existe $f(a)$.

- *De primera especie o de salto:* si existen los límites por la derecha y por la izquierda pero no coinciden.

- *De seguna especie o asintótica:* si no existe alguno de los límites laterales.

Ejemplo 7.

a) Estudie la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Solución:

El dominio de la función dada es el conjunto de los números reales, $\Re$. Vimos que no existe el límite de la función en $x = 0$, por lo que la función NO es continua en dicho punto. Además, podemos añadir que la discontinuidad es de primera especie ya que existen los límites laterales pero no coinciden. Sin embargo, como $f(0) = 0 + 1 = 1 = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$, podemos afirmar que la función es continua por la derecha de $x = 0$.

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}}$.

Solución:

Primero veamos cual es el dominio de la función. Claramente el denominador de la función se hace cero cuando $x = -7$, y sería un número imaginario si $x \leq -7$. Luego, el dominio de la función dada es $[-7, +\infty)$.

Esta función, en principio, es continua en todo su dominio excepto en el punto $x_0 = -7$. Veamos que ocurre en dicho punto:

$$\lim_{x \longrightarrow -7} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -7} \frac{1}{\sqrt{x+7}} = \frac{1}{0} = \infty \,.$$

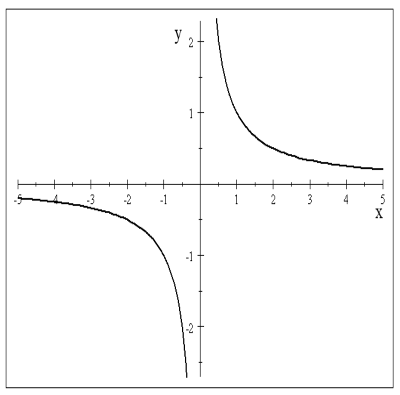
Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = -7$.

4.4. ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN.

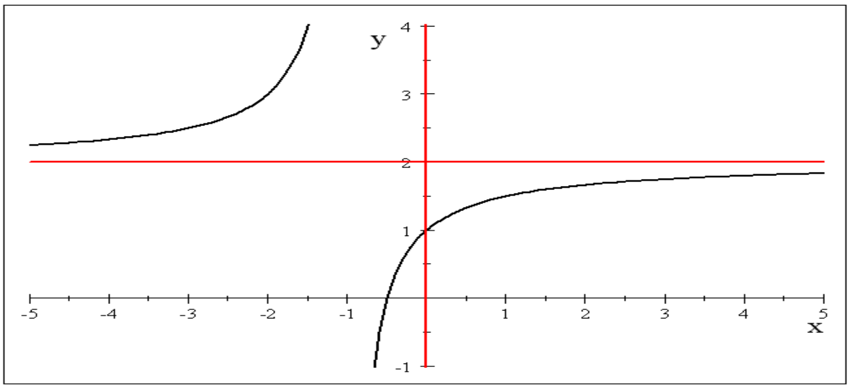
Una asíntota de una función f es una recta a la que se va aproximando la gráfica de una función a medida que ésta se aproxima al infinito, es decir, se aleja del origen de coordenadas.

Ejemplo 8.

a) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ son los ejes de coordenadas.



b) La función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tiene dos asíntotas, que son las rectas $y = 2$ (asíntota horizontal) y $x = -1$ (asíntota vertical).



Para calcular las asíntotas de una función dada, diferenciamos entre asíntotas horizontales, verticales y oblicuas (inclinadas).

- La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función f, si se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty\,.$$

- La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función f, si se cumple que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b\,.$$

Ejemplo 9.

a) La función $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2+1} = \frac{3}{\infty} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2+1} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

Observe que no tiene asíntotas verticales debido a que su denominador, $x^2 + 1$, no se anula nunca.

b) La función $f(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$ ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{0} = \infty$, y también tienen una asíntota horizontal en $y = 0$ porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0 \;\text{ y }\; \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0.$$

Finalmente, estudiaremos otro tipo de asíntotas, las oblicuas. Si consideramos una función racional, ésta tendrá una asíntota oblicua cuando el grado del numerador sea mayor en una unidad al grado del denominador. En este caso, la ecuación de la asíntota será de la forma $y = ax + b$ donde

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)\,.$$

Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles, es decir, si una función tiene alguna asíntota horizontal no puede tener ninguna oblicua y viceversa.

Ejemplo 10.

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$, ya que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2}{0} = \infty\,,$$

además tiene una asíntota oblicua en $y = x + 1$, pues

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x\,(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x} = 1, \qquad \text{y}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x - 2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-2} \right) = 1.$$

4.5. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2000, opción A). Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Estudiar si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.

c) Calcular sus asíntota oblicuas.

Solución:

a) Calculando los límites laterales de la función obtenemos

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x}{x+2} = \frac{3\cdot 2^2 - 2\cdot 2}{2+2} = 2 \ \text{ y } \ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4.$$

Como los límites laterales existen, pero son distintos, existe una discontinuidad de primera especie o de salto.

Por otra parte, $f(2) = 4 = \lim_{x\to 2^-} f(x)$,luego la función es continua por la izquierda en $x = 2$.

b) Aún no podemos resolverlo.

c) Tendremos que calcular las asíntotas oblicuas cuando $x \leq 2$ y cuando $x > 2$. En el primer caso, observe que el denominador se anula en $x = 1$, por lo que tendrá una asíntota horizontal en dicha recta. Luego, si $x \leq 2$ no hay asíntotas oblicuas. En el segundo caso, el denominador no se anula cuando $x > 2$, por lo que estudiaremos las asíntotas oblicuas.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x}{x\,(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x}{x^2+2x} = 3, \quad \text{y}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-2x}{x+2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-8x}{x+2}\right) = -8.$$

Luego la recta $y = 3x - 8$ es una asíntota oblicua cuando $x > 2$.

2. (2003, opción B). Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^2+1}{2x^2+2x-12}$, se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

Solución:

a) Estudiamos en qué puntos se anula el denominador, esto es

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3,\ x = 2.$$

Luego el dominio de la función es $\Re \setminus \{-3, 2\}$.

b) La función es continua en todo su dominio.

c) Como el denominador se anula en $x = -3$ y en $x = 2$, tendrá dos asíntotas verticales en dichas rectas. Veamos si hay alguna asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12}.$$

Como tiene una asíntota horizontal no tiene ninguna oblicua.