MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS C.C. SOCIALES

CAPÍTULO 3

Curso preparatorio de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años

curso 2010/11

Nuria Torrado Robles

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

3. PROGRAMACIÓN LINEAL **35**
3.1. PLANTEAMIENTO. 35
3.2. DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS DE UN PL. 36
3.3. RESOLUCIÓN DE UN PL 37
3.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN. 37

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

Los modelos de Programación Lineal por su sencillez son frecuentemente usados para abordar una gran variedad de problemas de naturaleza real en ingeniería y ciencias sociales, lo que ha permitido a empresas y organizaciones importantes beneficios y ahorros asociados a su utilización.

En general, un problema de programación lineal consiste en maximizar o minimizar el valor de una función lineal (*función objetivo*) sujeta a un sistema de desigualdades (*restricciones*), también lineales. En este tema nos centraremos en problemas simples que tienen solamente dos variables, es decir, problemas bidimensionales.

3.1. PLANTEAMIENTO.

Todo problema de programación lineal (PL) se caracteriza por:

1. La función objetivo, es aquella que se desea maximizar o minimizar.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

2. Las restricciones, son un conjunto de desigualdades o inecuaciones que determina el conjunto de **soluciones posibles** del problema.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

3. Las variables, han de tomar valores mayores o iguales que cero.

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0.$$

Además, podemos escribir el problema en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{mín(máx) } z &= c^t x \\ \text{s.a.} \qquad Ax &\geq b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

donde $c = (c_1, ..., c_n)^t$ es el vector de coeficientes de la función objetivo, $x = (x_1, ..., x_n)^t$ es el vector de variables, A_{mxn} es la matriz de coeficientes de las restricciones y $b = (b_1, ..., b_m)^t$ es el vector de términos independientes.

3.2. DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS DE UN PL.

El conjunto de posibles soluciones está determinado por las distintas inecuaciones, se llama **región factible**, y es un polígono cuyos lados son las rectas asociadas a cada restricción. Este polígono puede estar acotado o no. Cuando la región factible es acotada, existirá tanto el máximo como el mínimo de la función objetivo.

Si el problema no tiene restricciones, entonces todas las soluciones son factibles y el conjunto de soluciones factibles es todo $\Re^n$. Se dice que un problema es no factible si el conjunto de soluciones factibles es vacío.

Si un problema de programación lineal tiene solución debe ocurrir en un vértice de la región factible. Si hay más de una solución, al menos una de ellas debe ocurrir en un vértice. En cualquier caso, el valor de la función objetivo es único.

3.3. RESOLUCIÓN DE UN PL

Para resolver gráficamente un problema de programación lineal (PL) debe realizar los siguientes pasos:

1. Dibuje la región correspondiente al sistema de restricciones.

2. Determine los vértices de la región factible.

3. Calcule la función objetivo en todos y cada uno de los vértices de la región factible y seleccione los valores de las variables que optimizan la función objetivo, es decir, aquellos que la maximizan o minimizan.

3.4. EJERCICIOS RESUELTOS DE EXAMEN.

1. (2008, opción B). Se pide:

a) Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

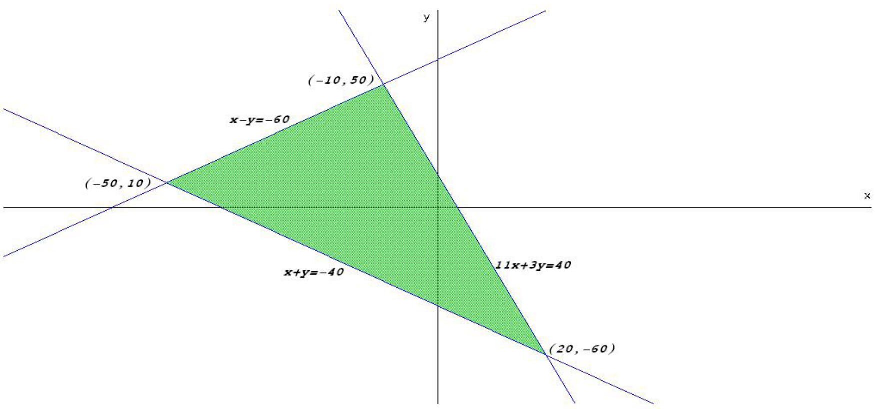
$$\begin{cases} -x & + & y & \leq & 60 \\ x & + & y & \geq & -40 \\ 11x & + & 3y & \leq & 40 \end{cases}$$

b) Maximizar la función $f(x,y) = 10x - y$ en la región obtenida en el apartado anterior.

c) Minimizar la función $g(x,y) = x - 10y$ en la región obtenida en el primer apartado.

Solución:

a) La región pedida es la siguiente:



b) La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} f(-10,50) &= -150 \\ f(-50,10) &= -510 \\ f(20,-60) &= 260 \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo de la función objetivo se alcanza en el punto $(20,-60)$ con un valor de 260.

c) En este caso, la función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned} g(-10,50) &= -510 \\ g(-50,10) &= -150 \\ g(20,-60) &= 620 \end{aligned}$$

Por tanto, el mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto $(-10,50)$ con un valor de -510.

2. (2009, opción B). Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene $0,10$ toneladas de gasolina y $0,35$ toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene $0,05$ toneladas de gasolina y $0,55$ toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

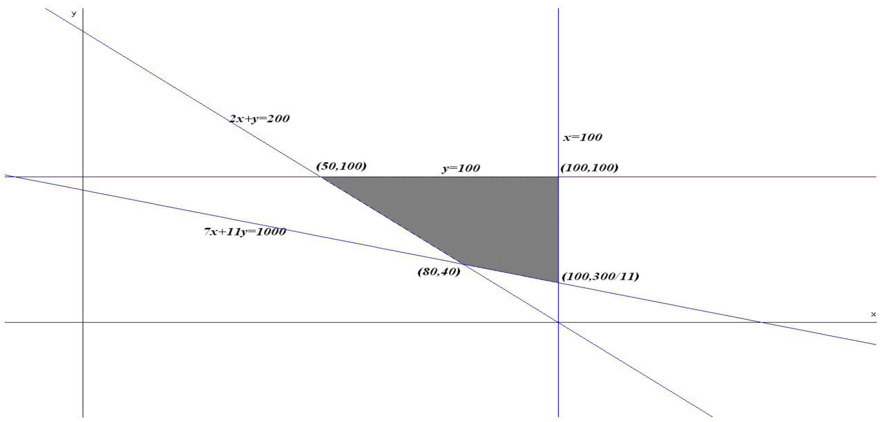
Sea x la cantidad de petróleo tipo A e y la cantidad de petróleotipo B. La función objetivo es

$$z = 350x + 400y,$$

y las restricciones son

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0{,}1x & + & 0{,}05y & \geq & 10 \\ 0{,}35x & + & 0{,}55y & \geq & 50 \\ & & x & \leq & 100 \\ & & y & \leq & 100 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & \geq & 200 \\ 7x & + & 11y & \geq & 1000 \\ & & x & \leq & 100 \\ & & y & \leq & 100 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Por tanto, la región factible es la siguiente:



La función objetivo tiene los valores siguientes en los vértices de la región factible:

$$\begin{array}{rcl} z(80, 40) & = & 44000 \\ z(50, 100) & = & 57500 \\ z(100, 300/11) & = & 45909{,}09 \\ z(100, 100) & = & 75000 \end{array}$$

Luego, para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.