Nuria Torrado Robles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 1, ejercicios de matrices y determinantes, curso 2010–2011.

1. Determine el orden de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si es posible, determine, $A+B$, $A-B$, $4A$ y $A+3B$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 12 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}.$

Solución:

a) $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}, A+3B = \begin{pmatrix} -7 & 28 \\ 39 & 29 \end{pmatrix}.$

b) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 14 \\ 31 & 42 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -11 & -10 \\ -9 & -38 \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ -28 & 8 \\ 44 & 8 \end{pmatrix}, A+3B = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 5 & 38 \\ 71 & 122 \end{pmatrix}.$

3. Encuentre X en las ecuaciones dadas.

a) $X = 3A - 2B$ c) $6X = 4A + 3B$
b) $3X + 2A = B$ d) $2A - 5B = 3X$

donde $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$

Solución:

a) $X = 3A - 2B = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ 7 & -17 \\ -17 & -2 \end{pmatrix}.$

b) $3X + 2A = B \Rightarrow 3X = B - 2A \Rightarrow X = \frac{1}{3}(B - 2A) = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{pmatrix}.$

c) $6X = 4A + 3B \Rightarrow X = \frac{1}{6}(4A + 3B) = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$

d) $2A-5B=3X \Rightarrow X=\frac{1}{3}(2A-5B)=\begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ 4 & -5 \\ -\frac{26}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$.

4. Determine AB y BA, si es posible.

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AB=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $AB=22$, $BA=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & -6 \\ -3 & 3 & -6 & 6 \\ 4 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$.

c) $BA=\begin{pmatrix} 20 & 9 \\ -28 & 33 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Determine la matriz transpuesta de las siguientes matrices y justifique que B es la inversa de A.

a) $A=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=BA$.

b) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=BA$.

6. Estudie si las siguientes matrices son no singulares, en caso afirmativo, halle su inversa por el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) $\det(A) = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3=F_3-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{F_1=F_1-4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_1=F_1+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A.$$

b) $\det(B) = 0$.

7. Calcule la matriz inversa, por el método de los adjuntos, de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{42} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule A^{-1} y B^{-1} por el método de los adjuntos.

b) Determine la matriz inversa de AB.

c) Compruebe que $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

Solución:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1}$$

9. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila se tiene

$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -10 + 5 - 2(-12) = 19.$

También se puede resolver de la siguiente forma:

$$A \rightarrow^{C_3 = C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow^{C_4 = C_4 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 19.$

10. Halle todas las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

(examen de los cursos 2005/06 y 2007/08, opción A).

Solución:

$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b\,(a+c) & c^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

$a^2 = 2a \Rightarrow a(a-2) = 0$

$c^2 = 2c \Rightarrow c(c-2) = 0$

$b\,(a+c) = 2b \Rightarrow a + c = 2 \Longrightarrow a = 2 - c$ sustituimos en la primera ecuación $(2-c)\,(2-c-2) = c\,(c-2) = 0$.

Luego, $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ o bien $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ con $b \in \mathbb{R}$.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenga todas las matrices B que conmuten con A, es decir, $AB = BA$.

(examen de los cursos 2008/09, opción B).

Solución:

Solo hay dos matrices que conmutan con A, y son la identidad y su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Sea $6A+2I=B$ una expresión matricial donde $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A?

b) Determine A.

c) Calcule $A+2I$.

Solución:

a) es una matriz 2x2.

b) $6A+2I=B \Rightarrow 6A=B-2I \Rightarrow A=\frac{1}{6}(B-2I)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

c) $A+2I=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.